

Hoja 4: Integración curvilínea y fórmula de Cauchy en el disco

1. Calcula la integral de línea de $f(z) = (z + 2)/z$ sobre los siguientes arcos de circunferencia

(a) $\gamma = \{|z| = 2\}$ (b) $\gamma^+ = \{|z| = 2\} \cap \{\Im z \geq 0\}$ (c) $\gamma^- = \{|z| = 2\} \cap \{\Im z \leq 0\}$

2. Calcula $\int_{\gamma} \exp(\pi z) dz$ cuando γ es la frontera del cuadrado de vértices $[0, 1, 1 + i, i]$.

3. Calcula la integral de línea $\int_{\gamma} (x^2 - iy^2) dz$ cuando

a) γ es el arco de la parábola $y = 2x^2$ que une $P_0 = 1 + 2i$ con $P_1 = 2 + 8i$

b) γ es el segmento que une P_0 con P_1

¿Es razonable que las integrales no coincidan?

4. Utiliza primitivas para calcular las integrales

(a) $\int_i^{1/2} e^{\pi z} dz$ (b) $\int_0^{\pi+i} \cos(z/2) dz$ (c) $\int_{|z|=4} \frac{dz}{\sqrt{z}}$

5. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco C^1 a trozos y $f \in C(\gamma^*)$. Demuestra las siguientes propiedades

(i) $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$, para toda reparametrización $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ con $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ difeomorfismo creciente. ¿Qué ocurre si φ es decreciente? ¿Y si consideramos $\int_{\gamma_1} f(z) |dz|$?

(ii) $\int_{F \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f \circ F(w) F'(w) dw$ para toda F holomorfa en un entorno de γ^*

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{[a, b_n]}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$ para toda sucesión $b_n \nearrow b$

6. En clase probamos que $I(a) := \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ cuando $a \in \mathbb{D}$.

a) Demuestra que $I(a) = 0$ cuando $|a| > 1$.

b) Calcula $I(a; z_0, R) := \int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-a}$, cuando $a \in D_r(z_0)$ y cuando $a \notin \overline{D_r(z_0)}$

Sugerencia: en (b), escribe $I(a; z_0, R)$ en términos de $I(\bar{a})$ con un cambio de variables adecuado.

7. Utiliza la fórmula integral de Cauchy para evaluar las siguientes integrales

(a) $\int_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz$ (b) $\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$ (c) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\text{Log}(z+1)}{\sqrt{z}(z-1)(z+2)} dz$

8. Demuestra que si $a > 1$ entonces $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + \cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$.

Sugerencia: usando $z = e^{it}$, transforma la integral en $\int_{|z|=1} f(z) dz$ para una $f(z)$ adecuada, y después utiliza la fórmula integral de Cauchy.

9. Demuestra que, si $P(z)$ es un polinomio de grado n entonces $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2\pi i n$.

Sugerencia: usar el ejercicio 10 de la hoja 2.

10. * a) Demuestra que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-(t+ib)^2} dt = \sqrt{\pi}$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra que a) sigue siendo cierto reemplazando ib por un complejo $a + ib$ arbitrario.

c) Si $f(t) = e^{-\pi t^2}$, demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i t x} dt = f(x)$.

Sugerencia: En (a), utiliza $\int_{\gamma_N} e^{-z^2} dz = 0$ si γ_N es el rectángulo con vértices $\pm N, \pm N + ib$, y haz $N \rightarrow \infty$.

Ejercicios adicionales:

11. Más integrales del tipo del Teorema de Cauchy

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int_{|z|=\pi} \frac{\sin \pi z}{z-1} dz & (b) \int_{|z|=\pi} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4} dz & (c) \int_{|z|=1/\pi} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^{39}} dz \\
 (d) \int_{|z-2|=2} \frac{z-5}{z^2+2z-3} dz & (e) \int_{|z+i|=3} \frac{ze^{\pi z}}{z^2+1} dz & (f) \int_{|z-1|=2} \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2-i} \right) dz \\
 (g) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\cos t} & (h) \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(t + \operatorname{sen} t) dt & (i) \int_{|z-1-i|=2} \frac{S(z)}{(z-1)^3} dz
 \end{array}$$

donde en (i) suponemos $S(z) = \int_0^z \operatorname{Log}(w+1) dw$

Soluciones: si no me he equivocado (a,c,h)=0, (b)= $i\pi^4/3$, (d,e)=- $2\pi i$, (f)= $\pi\sqrt{i}$, (g)= $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, (i)= $\pi i/2$.

12. * Demostración alternativa del ejercicio 6: sea $F(z) = \int_{C_{z_0,r}} \frac{d\xi}{\xi-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus C_{z_0,r}$

(i) demuestra que $F(z)$ cumple las hipótesis del lema de integración paramétrica que vimos en clase, y calcula $F'(z)$

(ii) demuestra que el integrando que aparece en $F'(z)$ tiene primitiva holomorfa, y concluye que F debe ser cte en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C_{z_0,r}$.

(iii) demuestra que $F(z) \equiv 2\pi i$ en $D_r(z_0)$, calculando $F(z_0)$ mediante parametrización de la curva

(iv) demuestra que $F(z) \equiv 0$ en $\mathbb{C} \setminus \bar{D}_r(z_0)$, calculando $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$

13. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, demuestra que

(i) $f'(0) = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)-f(-z)}{z^2} dz$

(ii) el conjunto $f(\mathbb{D})$ debe tener un diámetro mayor o igual que $2|f'(0)|$.

14. Utiliza el teorema de Liouville para probar

(i) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\Re[f(z)] > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $f \equiv cte$

(ii) Si $u \in \mathcal{H}ar(\mathbb{C})$ y está acotada inferiormente, entonces $u \equiv cte$

(iii) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|f'(z)| \leq M(1+|z|^{\frac{1}{2}})$ entonces f es un polinomio de grado 1

(iv) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y doblemente periódica (digamos $f(z+1) = f(z)$ y $f(z+i) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$), entonces $f \equiv cte$

(v) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (y no constante) entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C}

Sugerencia: En (ii) construye una función holomorfa $f = u + iv$ y aplica (i).

En (v), si no fuera denso se podría encontrar z_0 tal que $1/[f(z) - z_0]$ sea entera y acotada.