Hoja 5: Series de potencias y propiedades locales de funciones holomorfas

1. Calcula los radios de convergencia de las siguientes series de potencias (suponer el parámetro $\alpha > 0$)

(a) $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n$ (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{4^n+3n} z^n$ (c) $\sum_{n\geq 0} 2^{\alpha n} z^{3n}$ (d) $\sum_{n\geq 0} 2^{\alpha n} z^{3^n}$
(e) $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$ (f) $\sum_{n>1} (n!)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} z^n$ (g) $\sum_{n>0} (n!)^{\frac{1}{n^\alpha}} z^n$ (h) $\sum_{n\geq 0} \alpha^{n^2} z^{1+2+\ldots+n}$

Sugerencia: Puedes usar la fórmula de Stirling $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$.

2. Determina los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde convergen las siguientes series

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$

Sugerencia: Para determinar qué ocurre en la frontera puedes usar el Ejercicio 12.

3. Calcula las sumas explícitas de las siguientes series

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{2n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n z^{3n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) z^n$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n!}$

4. Desarrolla en serie de potencias en torno al origen, identificando el radio de convergencia

(a) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ (b) $\operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z}$ (c) $(\cosh z)^2$ (d) $\sqrt{z+i}$ (e) $\dfrac{z}{z^2-5z+6}$

Sugerencia: puedes derivar, integrar, usar fórmulas o fracciones simples, para reducir a series conocidas...

5. Considera la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{3n}$

(i) Determina para qué valores de z la serie converge, y dónde es holomorfa la función $f(z)$

(ii) Calcula la integral $\int_{|z-\frac{1}{4}|=\frac{1}{2}} \frac{e^{f(z)}}{z^2}\, dz$

(iii) Encuentra una expresión para $f(z)$, y utilízala para calcular $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{z^2}{z^3+1} f(z)\, dz$

6. Calcula (y determina dónde se alcanzan) $\max_{|z|\leq 1} \left|\frac{z^2}{z+2}\right|$ y $\max_{|z|\geq 1} \left|\frac{z}{4z^2-1}\right|$.

7. Demuestra el Teorema fundamental del álgebra utilizando el Principio del módulo mínimo.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante.

(a) Demuestra que $u = \Re f$ no tiene máximos ni mínimos locales en Ω.

(b) Si además Ω es acotado y $f \in C(\overline{\Omega})$, demuestra que $\min_{\partial\Omega} u < u(z) < \max_{\partial\Omega} u$, $\forall\, z \in \Omega$.

Sugerencia: aplica el PMM a las funciones $e^{f(z)}$ y $e^{-f(z)}$.

9. Para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definimos $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$, $r > 0$. Demuestra que $r \mapsto M(r)$ cumple

a) M es creciente, es decir $r_1 < r_2$ implica $M(r_1) \leq M(r_2)$

b) si $f \not\equiv$ cte, entonces $M(r)$ es estrictamente creciente.

10. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(1/n) = 1/n^2$, $\forall\, n \geq 2$. Calcular $f(i/2)$.

11. **V/F:** existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(1/n) = z_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ cuando

(a) $z_n = n/(n+1)$ (b) $z_{2n} = 0$ y $z_{2n-1} = 2^{-n}$ (c) $z_{2n} = \operatorname{sen}(1/n)$ y $z_{2n-1} = \cos(1/n)$

Opcionales

12. * Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, en los siguientes casos

(a) Si $a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \searrow 0$

(b) Si $a_n \in \mathbb{C}$ con $\sum_n |a_n - a_{n-1}| < \infty$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Además, para cada $\varepsilon > 0$, la convergencia es uniforme en $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D_\varepsilon(1)$.

Sugerencia: Revisa la demostración del criterio de Dirichlet, que se basa en la *fórmula de sumación por partes*: si $\mathtt{S}_n = s_0 + s_1 + \ldots + s_n$, entonces

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s_n = a_N \mathtt{S}_N - \sum_{n=0}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) \mathtt{S}_n.$$

13. Sean $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \ldots$ tal que $a_n \searrow 0$, y sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \Delta_1 := \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.

(a) Demuestra que $(1 - z)f(z) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)z^{n+1}$, $z \in \Delta_1$

(b) Demuestra que $|1 - z||f(z)| \geq (1 - |z|)a_0$, si $z \in \Delta_1$

(c)* Si $a_0 > a_1 > 0$, demuestra que la desigualdad en (b) es de hecho **estricta**, $\forall\, z \in \Delta_1 \setminus \{0\}$

(d) Demuestra el teorema de Eneström-Kakeya: si $0 < b_0 \leq b_1 \leq \ldots < b_N$, entonces el polinomio $P(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_N z^N$ tiene todas sus raíces en $|z| < 1$.

Sugerencia: En (c), la desigualdad triangular $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ es estricta, salvo si z_1 y z_2 tienen el mismo argumento (o uno de ellos es 0); ver Ejercicio 3.ii, Hoja 1. En (d), define $f(z) = z^N P(1/z)$ y usa los apartados anteriores.