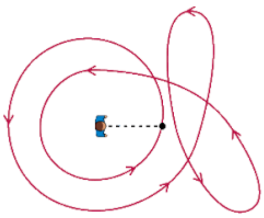
Funciones de Variable Compleja *Curso 2021/22*

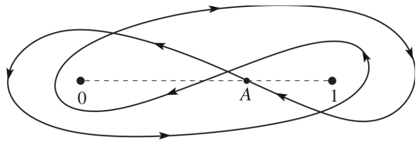
Hoja 6: Índices y teorema homológico de Cauchy

1. Calcula los índices $I(\gamma, z_0)$ en los siguientes casos

   (a) $\gamma(t) = 2\operatorname{sen} t + i\cos t$, $t \in [0, 4\pi]$, en $z_0 = 0$ $\qquad$ (b) $\gamma(t) = (\cos t)^2\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, en $z_0 = 1/2$

2. Calcula el índice de la curva γ del dibujo en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$





3. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua y cerrada.

   a) Demuestra que $I(\gamma, 0) = -I(1/\gamma, 0)$.

   b) Si z_0 y $1/z_0$ están en $\mathbb{C} \setminus (\gamma^* \cup \{0\})$, demuestra que $I(1/\gamma, 1/z_0) = I(\gamma, z_0) - I(\gamma, 0)$.

   Sugerencia: En b) puedes usar la identidad $\gamma - z_0 = (\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\gamma})\, z_0\gamma$.

4. Si γ es una arco cerrado tal que $\gamma^* \subset \Omega$ y sea $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, demuestra que

$$I(F \circ \gamma, F(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - F(z_0)}\, dz, \quad \forall\, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

   Deduce que si $F(z) = az + b$ (con $a \neq 0$) entonces $I(F \circ \gamma, F(z_0)) = I(\gamma, z_0)$, es decir el índice es invariante respecto a traslaciones, dilataciones y rotaciones.

5. Deduce del teorema homológico de Cauchy que, en las mismas condiciones y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f^{(n)}(z)\, I(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*.$$

   Sugerencia: Derivar adecuadamente la fórmula de Cauchy en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$.

6. Calcular el valor de a para que la función

$$f(z) := \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^3}\right) e^z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

   tenga una primitiva holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

7. Determina qué abiertos son simplemente conexos

   (a) $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ $\qquad$ (b) $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ $\qquad$ (c) $\{x + iy \in \mathbb{C} \;:\; y \in (0, 1)\}$

   (d) $\mathbb{D} \setminus [0, 1)$ $\qquad$ (e) $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, con $\gamma(t) = te^{it}$, $t \in [0, \infty)$ $\qquad$ (f) $\mathbb{C} \setminus \left[i\mathbb{R}^+ \cup_{n \geq 1} (\frac{1}{n} + i\mathbb{R}^+)\right]$

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo. Si Δ es un disco tal que $\partial\Delta \subset \Omega$, demuestra que entonces debe cumplirse $\overline{\Delta} \subset \Omega$.

9. * Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no nula. Demuestra que son equivalentes

a) $\displaystyle\int_\gamma (f'/f)\, dz = 0$, para todo arco cerrado $\gamma^* \subset \Omega$

b) f tiene un logaritmo holomorfo en Ω

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, f tiene una raíz n-sima holomorfa en Ω.

V/F: ¿Podemos añadir d) "*f tiene una raíz cuadrada holomorfa en Ω*"?

Sugerencia: En "a)$\Longrightarrow$b)", consulta la demostración del Teorema 4 de clase. En "c)$\Longrightarrow$a)", observa que $I = \int_\gamma f'/f \in 2\pi\mathbb{Z}$, y usando c) demuestra que de hecho $I \in 2\pi n\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implicará $I = 0$. En d) prueba con $f(z) = z^2$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.