## Hoja 7: Singularidades aisladas y series de Laurent

1. Para cada función, determina las singularidades aisladas, su tipo y su orden (si son polos).

$$(a)\ \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3} \qquad (b)\ \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)^4} \qquad (c)\ \frac{e^z}{z(1-e^{-z})} \qquad (d)\ z^4\operatorname{sen}(1/z)$$
$$(e)\ \cos(z+z^{-1}) \qquad (f)\ \frac{z-1}{1-\sqrt[3]{2-z}}$$

En el caso de polos o evitables, determina además el primer coeficiente no nulo $a_n$, $n\in\mathbb{Z}$, de su serie de Laurent.

2. Suponer que $f\in\mathcal{H}(D_R'(z_0))$ tiene un polo en $z_0$ de orden $N$. Demuestra que los coeficientes de la serie de Laurent de $f$ entorno a $z_0$ vienen dados por

$$a_n=\lim_{z\to z_0}\frac{\left[(z-z_0)^N f(z)\right]^{(n+N)}}{(n+N)!},\qquad n\geq -N.$$

3. Desarrollar en serie de Laurent, entorno a los puntos $z_0$, indicando el radio de convergencia

$$(a)\ \frac{1}{z-2}\text{ en } z_0=0,\infty \qquad (b)\ \frac{1}{(z^2+1)^2}\text{ en } z_0=i,\infty \qquad (c)\ z^2 e^{1/z}\text{ en } z_0=0,\infty$$
$$(d)\ z^2\operatorname{sen}(\tfrac{1}{z-1})\text{ en } z_0=1 \qquad (e)\ \operatorname{Log}(\tfrac{z-a}{z-b})\text{ con } z_0=\infty$$

4. Hallar 3 desarrollos de Laurent diferentes para $f(z)=\frac{5z+2}{z(z+1)(z-2)}$ entorno a $z_0=-1$, indicando en cada caso las regiones de convergencia.

*Sugerencia:* usa fracciones simples.

5. Sea $f(z)=1/(\operatorname{sen} z-z)$. Desarrollando el denominador en serie de potencias, trata de calcular los dos primeros coeficientes no nulos de la serie de Laurent de $f$ entorno al origen.

*Nota:* Puedes utilizar Maxima para comprobar el resultado, o para calcular más elementos de la serie de Laurent.

6. Los números de Bernoulli $B_n$ se definen mediante la igualdad

$$f(z):=\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}B_n\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<2\pi.$$

a) Demuestra que $B_0=1$ y $B_1=-1/2$

b) Demuestra que $B_{2n+1}=0$, para todo $n\geq 1$

c) Demuestra que $\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j=0$, para todo $n>1$. Deduce que $B_n$ es racional, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

*Sugerencia*: En b) prueba que $f(z)+z/2$ es una función par. En c), calcula la series de potencias de $(e^z-1)f(z)$ e iguala a $z$.

7. Utiliza los números de Bernoulli para calcular las series de Laurent en el origen de

$$(a)\ \frac{e^z}{(e^z-1)^2} \qquad (b)\ \frac{z}{\tanh z} \qquad (c)\ \tan z=\tfrac{1}{\tan z}-\tfrac{2}{\tan(2z)}$$

8. Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $|f(z)|\leq A|z|^{\frac{1}{2}}+B|z|^{-\frac{1}{2}}$. Demuestra que $f\equiv$ constante.

9. Sea $f$ holomorfa en $\Omega = D'_R(z_0) \setminus \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $z_n$ es una sucesión de polos de $f$ que converge a $z_0$. Demuestra que $f\big(\Omega\big)$ es denso en $\mathbb{C}$. ¿Conoces algún ejemplo de una tal $f$?

   *Sugerencia:* Suponer (por RA) que $|f(z) - b| \geq \varepsilon$ para algún $b$ y $\varepsilon$, y definir $h(z) = 1/(f(z) - b)$.

10. a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es un polinomio, demuestra que $f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$

    b) Deduce que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$

    c) Deduce que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, entonces $f$ es un polinomio.