Variable Compleja, 3º Matemáticas **Examen final, 17/1/2022**

Nombre y DNI: 10

1. a) Enuncia el lema de derivación de integrales paramétricas complejas

   b) Demuestra que la función

2
$$F(z) = \int_{\partial D_r(a)} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \partial D_r(a),$$

   cumple las hipótesis del lema de DIP

   c) Demuestra que $F'(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$

   d) Calcula el valor de $F(z)$ si $|z - a| > r$.

   Nota: 2 ptos

2. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Suponer que $|f(z)| = 1$, para todo $|z| = 1$.

   a) Demuestra que $\mathcal{Z}_f(\mathbb{D})$ es un conjunto finito

2 b) Si f no es constante, demuestra que $\mathcal{Z}_f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$

   Nota: 2 ptos

3. Sea $f \in \mathcal{H}(D'_r(a))$. Demuestra:

   a) Si $a \in \mathcal{P}_f$, entonces $a \in \mathcal{P}_{f'}$ y $o(a, f') = o(a, f) + 1$.

2 b) Si a es sing esencial de f entonces también es sing esencial de f'

   Nota: 2 ptos

4. Utilizando el teorema de los residuos, demuestra

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2}\, dx = \pi\, e^{-a}/2 \quad a > 0.$$

7 Debes justificar adecuadamente el límite de las integrales sobre los semicírculos C_R.

   Nota: 2 ptos

5. **V ó F:** justifica o da un contraejemplo

   a) Si $z = a + ib$ con $a < 0$ y $b > 0$ entonces ${}_{\mathrm{P}}\sqrt{z^2} = -z$

2 b) Las series $\sum \frac{z^n}{n}$ y $\sum \frac{z^{2^n}}{2^n}$ tienen el mismo radio de convergencia

   c) Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo, es simplemente conexo NO. $\mathbb{C} - \mathbb{D}$

   d) Los polinomios $P_c(z) = z^4 + cz^3 + 1$, $|c| = 1$, tienen todas sus raíces en $D_{3/2}(0)$.

   Nota: 2 ptos

1

① a) Sea γ un arco y $f: \Omega \times \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua que verifica: 2/

1) $\forall \xi \in \gamma^*$ fijo se tiene que $f^{\xi}: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f^{\xi}(z) = f(z, \xi)$ es holomorfa.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z,\xi) = (f^{\xi})'(z)$ es continua en $\Omega \times \gamma^*$

Entonces si definimos $F(z) = \int_{\gamma} f(z,\xi)\, d\xi$, se tiene que F es holomorfa y $F'(z) = \int_{\gamma} \dfrac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)\, d\xi$.

b) Consideramos $F(z) = \displaystyle\int_{\partial D_r(a)} \frac{d\xi}{\xi - z}$, $z \in \Omega := \mathbb{C} - \partial D_r(a)$.

En este caso tenemos $\gamma = \partial D_r(a)$, Ω como ya se ha definido y $f: \Omega \times \partial D_r(a) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z,\xi) = \dfrac{1}{\xi - z}$. Es claro que f es continua pues el denominador no se anula. f^{ξ} también es holomorfa en Ω por ser una función racional con denominador que no se anula y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z,\xi) = \dfrac{1}{(\xi - z)^2}$ es continua en $\Omega \times \partial D_r(a)$ por el mismo motivo. De modo que se verifican las hipótesis del teorema.

c) Tenemos que $F'(z) = \displaystyle\int_{\partial D_r(a)} \frac{d\xi}{(\xi - z)^2}$ por el lema DIP. Ahora, $\dfrac{1}{(\xi - z)^2}$ tiene primitiva $-\dfrac{1}{\xi - z}$ (en $\mathbb{C} - \{z\} \supseteq \gamma^*$) como función de ξ, así que por la regla de Barrow se deduce $\displaystyle\int_{\partial D_r(a)} \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0. \Rightarrow F'(z) = 0, \forall z \in \Omega.$

d) Del apartado anterior se deduce que F es constante sobre cada componente conexa de Ω. En particular, es constante en $\{z : |z-a| > r\}$.

Ahora, por el teorema de convergencia dominada se tiene que

$\displaystyle\lim_{z \to \infty} \int_{\partial D_r(a)} \frac{d\xi}{\xi - z} = 0$, por lo que F es idénticamente nula en $\{z : |z-a| > r\}$

② Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $|f(z)| = 1$, $\forall z$ con $|z| = 1$.

a) $Z_f(\mathbb{D})$ es finito.

Supongamos que $Z_f(\mathbb{D})$ es infinito por reducción al absurdo. Entonces tendríamos un conjunto ~~infinito~~ contenido en el compacto $\overline{\mathbb{D}}$, por lo que existe un punto de acumulación de $Z_f(\mathbb{D})$. Sea $(z_n)_n$ una sucesión de ceros de f, $z_n \in \mathbb{D}$ que converge a $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Caso 1 $z \in \mathbb{D}$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y sus ceros tienen un punto de acumulación en su dominio, de donde $f|_{\mathbb{D}} \equiv 0$ por el principio de prolongación analítica. Pero entonces tendríamos $|f(z)| = 0$ en $\partial\mathbb{D}$ por la continuidad. Una contradicción. ✓

Caso 2 $z \in \partial\mathbb{D}$. Entonces $|z| = 1$ y $f(z) \overset{f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})}{=} \lim_n \underbrace{f(z_n)}_{0} = 0 \Rightarrow |f(z)| = 0$.
Que contradice las hipótesis.

✓

b) Si f no es constante entonces $Z_f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$.

Voy a demostrarlo mediante el principio del módulo mínimo (y máximo).

En primer lugar, como $f \not\equiv$ cte, $\overset{\text{(por el principio del módulo máximo)}}{\text{el}}$ máximo de $|f| : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$ debe alcanzarse sobre la frontera. De donde $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$. ✓

Ahora, $|f|$ no puede ser constante en $\overline{\mathbb{D}}$ pues como $f \not\equiv$ cte, f es abierta y no puede tenerse $\underbrace{f(\mathbb{D})}_{\text{abierto}} \subseteq \underbrace{\partial\mathbb{D}}_{\text{interior vacío}}$. De ahí deducimos que $\exists z_0 \in \mathbb{D}$ con $|f(z_0)| < 1$. ✓

Con lo anterior sabemos que el mínimo absoluto de $|f| : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$ se alcanza en $\mathbb{D}$ (pues $|f(z)| = 1 > |f(z_0)|$ si $z \in \partial\mathbb{D}$), este será entonces un mínimo local de $|f|$ y será un cero por el principio de módulo mínimo. $\Rightarrow Z_f(\mathbb{D}) \neq \emptyset$

✓

(3) Consideramos $f \in \mathcal{H}(D'_r(a))$

a) Si $a \in P_f$ entonces $a \in P_{f'}$ y $o(a, f') = o(a, f) + 1$

Sabemos que f se descompone como $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ con $m = o(a, f)$ y g holomorfa en un entorno de a, $g(a) \neq 0$.

Entonces $f'(z) = \dfrac{g'(z)(z-a)^m - g(z)m(z-a)^{m-1}}{(z-a)^{2m}} = \dfrac{g'(z)(z-a) - m\,g(z)}{(z-a)^{m+1}}$

así que $\lim\limits_{z \to a} (z-a)^{m+1} f'(z) = g'(a) \cdot 0 - m\,g(a) = -m\,g(a) \neq 0 \Longrightarrow$

a es un polo de f' de orden $m+1$. Como queríamos.

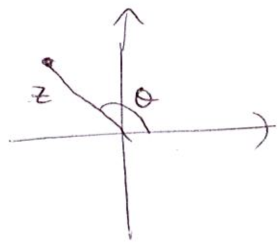
b) Si a es singularidad esencial de f entonces también lo es de f'.

Usa la caracterización de singularidades esenciales que nos dan las series de Laurent.

Sabemos que f se escribe como $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ con infinitos $a_n \neq 0$, $n < 0$ en $D'_r(a)$.

Pero entonces $f'(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1} = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$ tiene $b_n = (n+1) a_{n+1}$ y por tanto también tendrá infinitos $b_n \neq 0$ con $n < 0$. $\Longrightarrow$
a es singularidad esencial de f'.

(5) a) Si $z = a + i b$, $a < 0$, $b > 0$ entonces $\sqrt[p]{z^2} = -z$



Es verdadero. Antes de probarlo observamos que z se encuentra en el segundo cuadrante, por lo que podemos escribirla como $z = |z| e^{i\theta}$ con $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Ahora, $\sqrt[p]{z^2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^2)}$, $\operatorname{Log}(z^2) = \ln|z^2| + i \operatorname{Arg}(z^2)$.

además, $z^2 = |z^2| e^{i2\theta}$ y $2\theta \in (\pi, 2\pi) \Longrightarrow 2\theta - 2\pi \in (-\pi, 0) \subseteq (-\pi, \pi]$.

Así que $\operatorname{Arg}(z^2) = 2\theta - 2\pi \Longrightarrow$

$\operatorname{Log}(z^2) = 2\ln|z| + i(2\theta - 2\pi) \Longrightarrow \sqrt[p]{z^2} = e^{\frac{1}{2}(2\ln|z| + i(2\theta - 2\pi))} =$

$= e^{\ln|z|} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{-i\pi} = \underbrace{|z| e^{i\theta}}_{z} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -z$ Como queríamos.

b) ¿ $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z}{z^n}$ tienen el mismo radio de convergencia?

Es verdadera, pues si las escribimos como $\sum_n a_n z^n$, $\sum_n b_n z^n$, la primera tiene $a_n = \frac{1}{n}$ y la segunda

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es potencia de } 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

así que $\limsup_n \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ (pues el límite superior es el mayor de entre los límites de las subsucesiones).

Luego $\limsup_n \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ y tienen el mismo radio de convergencia.

√

c) Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $\mathbb{C} - \Omega$ es conexo, ¿es Ω simplemente conexo?

Falso. Tomar $\Omega = \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$, entonces $\mathbb{C} - \Omega = \overline{\mathbb{D}}$ es conexo, pero Ω no es simplemente conexo. Esto lo podemos ver mediante nuestra caracterización topológica de simplemente conexo.

$\mathbb{C}^{\#} - \Omega = \overline{\mathbb{D}} \cup \{\infty\}$ y ∞ sería un punto aislado de $\overline{\mathbb{D}} \cup \{\infty\}$, así que $\mathbb{C}^{\#} - \Omega$ no es conexo.

√

También habría servido $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces es claro que $\mathbb{C}^{\#} - \Omega = \{0\} \cup \{\infty\}$ es disconexo.

d) Los polinomios $P_c(z) = z^4 + cz^3 + 1$, $|c| = 1$ tienen todas sus raíces en $D_{3/2}(0)$.

Es verdadera. Lo demuestro mediante el teorema de Rouché sobre el arco simple $\partial D_{3/2}(0)$ con $f(z) = z^4$, $g(z) = P_c(z)$.

Si $z \in \partial D_{3/2}(0)$ entonces $|g(z) - f(z)| = |cz^3 + 1| \leq |z|^3 + 1 = \frac{3^3}{2^3} + 1 =$

$= \frac{27}{8} + 1 = \frac{54+16}{16} = \frac{70}{16} < \frac{81}{16} = |z^4| = |f(z)|$. $\Longrightarrow$

√

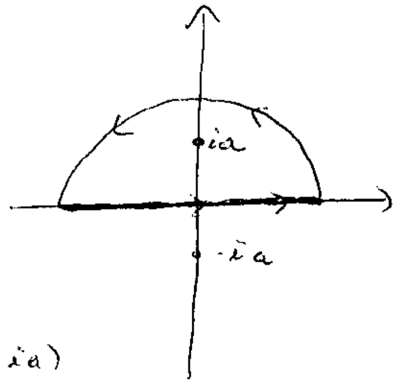
$\# Z_{P_c(z)}(D_{3/2}(0)) = \# Z_f(D_{3/2}(0)) = 4$, y como P_c es un polinomio de grado 4, no tiene más ceros que los que hay en $D_{3/2}(0)$.

Me ha faltado mencionar que trabajamos con $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, se tiene $\partial D_{3/2}(0) \sim 0$, lo cual justifica el uso del teorema de Rouché.

(7) Demostrar $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$, $a>0$

Considero $f(z) = \dfrac{z}{z^2+a^2}e^{iz}$, que es holomorfa en $\mathbb{C}-\{ia,-ia\}$

y los arcos $\Gamma_R = [-R,R] \cup C_R$ con C_R el semicírculo Re^{it}, $t \in [0,\pi]$. Entonces, tomando $\Omega = \mathbb{C}$, $A = \{ia,-ia\}$, como Ω es simplemente conexo, tenemos $\Gamma_R \sim 0$ y podemos aplicar el teorema de los residuos $\Rightarrow$



$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, I(\Gamma_R, ia)\operatorname{Res}(f, ia) + 2\pi i \underbrace{I(\Gamma_R,-ia)}_{0}\operatorname{Res}(f,-ia)$$

y si $|R|>a$ entonces $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia)$.

Ahora, $f(z) = \dfrac{z\, e^{iz}}{(z-ia)(z+ia)}$, así que ia es un polo de orden 1 y

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)f(z) = \lim_{z\to ia}\frac{z e^{iz}}{z+ia} = \frac{ia\, e^{-a}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2} \Rightarrow$$

$\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = i\pi e^{-a}$. Ahora queda relacionar las dos integrales.

Veamos en primer lugar que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$.

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{C_R}\frac{z e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz\right| \le \int_{C_R}\frac{|z\, e^{iz}|}{|z^2+a^2|}\,|dz| \le$$

$$\le \int_{C_R}\frac{|z|\cdot|e^{iz}|}{|z|^2-a^2}\,|dz| \underset{|z|=R}{=} \frac{R}{R^2-a^2}\int_{C_R}|e^{iz}|\,|dz| \underset{\substack{z=Re^{it}\\ dz=iRe^{it}dt}}{=}$$

$$= \frac{R}{R^2-a^2}\int_0^{\pi}|e^{i(R\cos t+iR\operatorname{sen} t)}|\,|iRe^{it}|\,dt = \frac{R^2}{R^2-a^2}\int_0^{\pi}|e^{iR\cos t}|\,|e^{-R\operatorname{sen} t}|\,dt$$

$$= \frac{R^2}{R^2-a^2}\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt.$$

Ahora, $\lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{R^2}{R^2-a^2} = 1$, y como $\operatorname{sen} t > 0$ en $(0,\pi)$, del teorema de convergencia dominada se deduce $\lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt =$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\lim_{R\to+\infty} e^{-R\operatorname{sen} t}}_{0}\, dt = 0 .$$

De donde $\lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$

Por otro lado tenemos

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2+a^2}\,dx}_{\text{Impar}} + i\int_{-R}^{R} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$$

$$= i\int_{-R}^{R} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx .$$

De donde

$$i\int_{-R}^{R} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = i\pi e^{-a}.$$

y tomando límites deducimos que $\lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \pi e^{-a}.$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \pi e^{-a}.$ Y como $\dfrac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}$ es par, tenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

como queríamos.