Variable Compleja, 3º Matemáticas
Examen mayo, 23/5/2022

Nombre y DNI: ....

1. Demuestra, enunciando los teoremas que utilices

   a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$ entonces $|f^{(n)}(0)| \leq n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Si $|a_n| \leq n!$, $\forall\ n \geq 0$, entonces la serie de potencias $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$.

   c) **V/F:** En las condiciones de b), ¿se cumple además que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \leq 1$?

   Nota: 2 ptos

2. Para $a \in \mathbb{C}$ definimos
$$f(z) = \frac{z}{az - \sin z}.$$

   a) Determina para qué valores de a la función f tiene una singularidad evitable en $z = 0$, y el correspondiente valor de $f(0)$.

   b) Determina para qué valores de a la función f tiene un polo en $z = 0$, y calcula el orden del polo, el residuo, y los primeros 2 términos (no nulos) de la serie de Laurent.

   c) ¿Tiene $e^{f(z)}$ una singularidad esencial en $z = 0$ para algún valor de a?

   Nota: 2 ptos

3. Encuentra el desarrollo de Laurent en el anillo $\{4 < |z| < 6\}$, de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z-6)^2}\,.$$

   Demuestra, en particular, que los coeficientes $a_{-2} = 1$ y $a_0 = 1/18$.

   Nota: 2 ptos

4. Utilizando el teorema de los residuos, demuestra
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2}\, dx \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2a}} \qquad a > 0.$$

   Debes justificar adecuadamente los límites de las integrales que aparezcan.

   Nota: 2 ptos

5. **V ó F** (justifica la respuesta)

   a) El número complejo $\frac{ie^{-5i}(1+i)^3}{1+3i}$ pertenece a $\mathbb{Q}$

   b) Existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\Im m\,(e^{i\pi/3} f(x+iy)) = x^3 - 3xy^2$

   c) La ecuación $e^z = -3z^3$ tiene al menos 3 soluciones $z \in \mathbb{D}$.

   d) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cumple que $f(0) = 1$ y
$$|f(z)| \leq e^{x^2-y^2}, \quad \forall\ z = x+iy \in \mathbb{C},$$

   entonces necesariamente $f(z) = e^{z^2}$.

   Nota: 2 ptos

1 (a) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $|f(z)| \leq 1 \Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por el teo Cauchy, $\forall\ r < 1$, si $\Delta_r = \{|z| < r\}$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\xi|=r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{n+1}} |d\xi| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\xi|=r} \frac{1}{r^{n+1}} |d\xi| = \frac{n!}{r^n}$$

$$\left.\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \quad \forall\ r<1 \right\} \Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq n!$$

b) Si $|a_n| \leq n! \Rightarrow |g(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n!}\right| |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$

Por M-test, la serie converge uniform en todo disco $\bar{\Delta}_r \subseteq \mathbb{D}$ y por tanto, en todo compacto de $\mathbb{D}$.

c) ¿$|g(z)| \leq 1$? No, podemos tomar $a_n = n!$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ y } \lim_{r \to 1^-} g(r) = \infty.$$

---

2) $f(z) = \dfrac{z}{az - \sin z}$

a) $z=0$ es sing evitable $\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{az - \sin z}$

$$\left.\text{Como } \frac{z}{az - \sin z} = \frac{z}{az - z + \frac{z^3}{3!} + O(z^5)} = \frac{1}{(a-1) + \frac{z^2}{3!} + O(z^4)} \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{1}{a-1} \right\}$$

Por tanto, sing evitable $\Leftrightarrow a \neq 1$ y en ese caso $f(0) = \frac{1}{a-1}$

b) Si $a=1 \to z=0 \in P_f$ con $\sigma(z=0, f) = 2$, pues

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^3}{z - \sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z^3}{\frac{z^3}{3!} + O(z^5)} = 3! \neq 0$$

Para hallar

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} (z^2 f(z))' = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z^3}{z-\operatorname{sen} z}\right)'$$

O bien desarrollamos en serie

$$z^2 f(z) = \frac{z^3}{z-\operatorname{sen} z} = \frac{z^3}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+O(z^7)} = \frac{3!}{1-\frac{3!}{5!}z^2+O(z^4)} = \frac{3!}{1-\left[\frac{z^2}{20}+O(z^4)\right]}$$

$$= 3!\left(1-\left[\frac{z^2}{20}+O(z^4)\right]+O(z^2)^2\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{3!}{z^2} - 3/10 + O(z^2) \Rightarrow \boxed{a_{-1}=0, \quad a_0 = -3/10 \quad a_{-2}=6}$$

c) $e^{f(z)}$ ~~no~~ tiene sing evitable si $a \neq 1$

Si $a=1 \Rightarrow f(z) = \frac{3!}{z^2} + h(z)$ con $h \in \mathcal{H}$ (entorno de 0)

$$\Rightarrow e^{f(z)} = \underbrace{e^{\frac{6}{z^2}}}_{\uparrow} \cdot \underbrace{e^{h(z)}}_{\text{holom}}$$

esencial, pues tiene serie Laurent infinita

(F)

5) a) $z = \dfrac{i e^{-5x}(1+i)^3}{1+3i} \in \mathbb{Q}$

F pues cierto $\Rightarrow |z| = \dfrac{|1+i|^3}{|1+3i|} = \dfrac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$ ↯.

b) (V) $f(z) = z^3 \Rightarrow \operatorname{Re}(z^3) = x^3 - 3xy^2$

$\operatorname{Im}(e^{i\pi/3} f(z)) = \operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(i z^3)$

$\Rightarrow$ Si tomo $f(z) = e^{-i\pi/3} i z^3 \Rightarrow$ cierto

$\Rightarrow$

(C) $\left.\begin{array}{l} f(z) = e^z + 3z^3 \\ g(z) = 3z^3 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z)-g(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \le e < |g(z)| = 3$ si $|z| \le 1$

$\xRightarrow{\text{Rouché}} \# Z_f(D) = \# Z_g(D) = 3.$ (V)

(d) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$: $|f(z)| \le e^{x^2-y^2}$

Defino $h(z) = f(z) e^{-z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow |h(z)| \le e^{x^2-y^2} \cdot |e^{-z^2}| = e^{x^2-y^2} \cdot e^{-\operatorname{Re}(z^2)} = 1$

$\xRightarrow{\text{Liouville}} \left.\begin{array}{l} h(z) = \text{cte} \\ h(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow h(z) \equiv 1 \Rightarrow f(z) \equiv e^{z^2}$ //

(3) $A = \{4 < |z| < 6\}$

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z-6)^2} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-6} + \frac{C}{(z-6)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(z-6)^2 + B(z-6)(z-4) + C(z-4)$$

$$\xrightarrow{z=6} \boxed{C = 1/2} \qquad \xrightarrow{z=4} \boxed{A = 1/4} \qquad \xrightarrow{z=5} \quad 1 = A - B + C$$

$$1 = \frac{3}{4} - B \Rightarrow \boxed{B = -1/4}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1/4}{z-4} - \frac{1/4}{z-6} + \frac{1/2}{(z-6)^2} = (1) + (2) + (3)$$

$$(1) = \frac{1/4}{z(1-\frac{4}{z})} \underset{\left|\frac{4}{z}\right|<1}{=} \frac{1/4}{z} \sum_0^{\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^n = \frac{1/4}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \dots$$

$$(2) = \frac{1/4}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{6}} \underset{\left|\frac{z}{6}\right|<1}{=} \frac{1}{24} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{6}\right)^n = \frac{1}{24} + \frac{z}{144} + \dots$$

$$(3) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{z-6}\right)' = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{6}}\right)' \underset{\left|\frac{z}{6}\right|<1}{=} \frac{1}{12}\left(\sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{6}\right)^n\right)' = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{6^n}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6} + \frac{2z}{6^2} + \dots\right) = \frac{1}{72} + \frac{z}{6^3} + \frac{1}{12} \sum_{n=2} \frac{(n+1) z^n}{6^{n+1}}$$

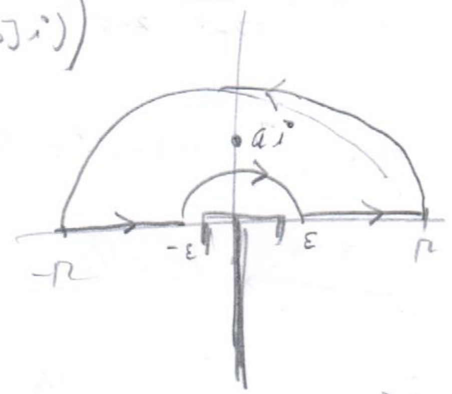
$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n \geq 3} \frac{4^{n-2}}{z^n} + \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{\boxed{a_{-2} = 1}} + \frac{1/4}{z} + \underbrace{\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{72}\right)}_{\boxed{\frac{1}{18} = a_0}} + \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{6^n} + \frac{2n+2}{6^{n+1}}\right)}_{\frac{2n+8}{6^{n+1}}} z^n$$

④ $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\,dx \longrightarrow$ integral tipo 3

$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+a^2} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}\setminus(\{\pm ai\}\cup(-\infty,0]i)\right)$

raíz holom en este dom.

Sea $\Gamma_{\varepsilon,R} = [-R,-\varepsilon]\cup C_\varepsilon^- \cup [\varepsilon,R]\cup C_R^+$



Tma Res $\Rightarrow$

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i\, \underbrace{\operatorname{Res}(f,ai)}_{} = 2\pi i \lim_{z\to ai} \frac{(z-ai)\sqrt{z}}{(z-ai)(z+ai)} = 2\pi i\, \frac{(ai)^{1/2}}{2ai} = \pi\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \int_{[-R,-\varepsilon]} f - \int_{C_\varepsilon} f + \int_{[\varepsilon,R]} f + \int_{C_R} f = I^1 + \dots + I^4$$

$$I^1 \underset{z=-t}{=} -\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{-t}}{t^2+a^2}(-dt) = i\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{t}}{t^2+a^2}\,dt \xrightarrow{+\infty} i\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+a^2}\,dt$$

$$\left(\sqrt{-t} = e^{\frac{1}{2}\log(-t)} = e^{\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg}(-t)} = |t|^{1/2}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I^1 + I^3 \longrightarrow (1+i)\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+a^2}\,dt$$

- $|I^2| \le \int_{C_\varepsilon} \frac{|\sqrt{z}|}{|z^2+a^2|}|dz| \le \int_0^\pi \frac{\sqrt{\varepsilon}\cdot\varepsilon\,dt}{a^2-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^{3/2}\cdot\pi}{a^2-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

  $z=\varepsilon e^{it}$, $\quad |z^2+a^2| \ge a^2-|z|^2$

- $|I^4| \le \int_{C_R} \frac{|\sqrt{z}|}{|z^2+a^2|}|dz| \le \int_0^\pi \frac{\sqrt{R}\cdot R}{R^2-a^2}\,dt = \frac{R^{3/2}\cdot\pi}{R^2-a^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

  $z=Re^{it}$, $\quad |z^2+a^2| \ge |z|^2-a^2$

Por tanto, $\quad (1+i)\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+a^2}\,dt = \frac{\pi\, e^{i\pi/4}}{\sqrt{a}}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\cdot\frac{e^{i\pi/4}}{1+i} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\,\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}$$