Variable Compleja, 3º Matemáticas   Test 1, 22/10/2021

10

Nombre: SOLUCIONES

1. Calcula la integral (según los valores de $r > 0$)

$$\int_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}$$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la integral $\quad I_n = \int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$

3. Demuestra que si f es holomorfa (en un dominio que debes precisar) se tiene

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\cos^2(t/2)\,dt \;=\; 2f(0) + f'(0),$$

Nota: quizá debas usar la fórmula $\cos^2(t/2) = (1+\cos t)/2$.

① Caso 1: $0<r<1$. $f(z) := \dfrac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)} \in H(\mathbb{C}\setminus\{1,2\})$ y ~~$\overline{D_r(0)} \subset \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$~~ $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$ es un entorno de $\overline{D_r(0)}$

Por tanto, $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}\,dz = 0$, $0<r<1$ ✓

Caso 2: $1<r<2$. $g(z) := \dfrac{\cos(\pi z)}{z-2} \in H(\mathbb{C}\setminus\{2\})$, ~~$\overline{D_r(0)} \subset \mathbb{C}\setminus\{2\}$~~ $1 \in D_1(0)$.

$\mathbb{C}\setminus\{2\}$ es un entorno de $\overline{D_r(0)}$ y

Por la fórmula de Cauchy en el disco,

$$\int_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}\,dz = \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\, g(1) = 2\pi i,\quad 1<r<2$$ ✓

Caso 3: $r>2$

Descomponemos $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ en fracciones simples: $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z-2}$;

$A(z-2) + B(z-1) = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array}$

$\cos(\pi z) \in H(\mathbb{C})$. $1, 2 \in D_r(0)$

$$\int_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}\,dz = -\int_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{z-1} + \int_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{z-2}.$$

Por la fórmula de Cauchy en el disco:

$$\int \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}\,dz = 2\pi i\left[-\cos(\pi) + \cos(2\pi)\right] = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i,\quad r>2$$ ✓

Si $r=1$ o $r=2$, la integral no existe.

② $I_n = \int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$. Definimos $f_n(z) := z^n \in H(\mathbb{C})$.

$f_n^{(n-1)}(z) = n!\, z$

$\cancel{f_n^{(n-1)}(z) = \frac{n!}{n!} z}$ $1 \in \{|z-1| < 1\}$ y $f \in H(\mathbb{C})$; por tanto,

Por la fórmula de Cauchy para derivadas,

$$I_n = \int_{|z-1|=1} \frac{f_n(z)}{(z-1)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f_n^{(n-1)}(1) = \frac{2\pi i \, n!}{(n-1)!} = 2\pi i n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

③ $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\, dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \left(\frac{1+\cos t}{2}\right) dt =$

$\cancel{= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}+e^{-it}+1}{2} = \frac{1}{4}\int_{|z|=1} f(z)\left(z+1+\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{iz}}$

$\cancel{z = e^{it}}$, $\cancel{dz = i z\, dt}$, $\cancel{dt = \frac{dz}{iz}}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 1\right) dt \underset{\substack{z=e^{it}\\ dz = iz\,dt \\ dt = \frac{dz}{iz}}}{=} \frac{1}{2}\int_{|z|=1} f(z) \cdot \frac{z+2+1/z}{2iz}\, dz =$$

$$= \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} f(z) \cdot \frac{z^2+2z+1}{z^2}\, dz = \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)(z+1)^2}{z^2}\, dz .$$

Definimos $g(z) = f(z)(z+1)^2$. Si $f(z)$ es holomorfa en un entorno Ω de $\{|z| \le 1\}$, entonces $g(z) \in H(\Omega)$ y, como $0 \in \{|z|<1\}$, se tiene que aplicando la fórmula de Cauchy para derivadas

$$\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)(z+1)^2}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{4i} g'(0) = \frac{2\pi i}{4i}\left(f'(0) + 2f(0)\right) = \frac{\pi}{2}\left(f'(0)+2f(0)\right)$$

$(g'(z) = f'(z)(z+1)^2 + 2f(z)(z+1)$; $g'(0) = f'(0) + 2f(0))$

Por tanto, si f es holomorfa en un entorno de $\{|z| \le 1\}$, entonces

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\, dt = f'(0) + 2f(0) .$$