Variable Compleja, 3º Matemáticas **Test 2, 10/11/2021**

Nombre: SOLUCIONES

1. Determina el disco de convergencia $D_R(a)$ de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(z-2)^n$.

2. Determina (y dibuja) los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde converge la serie $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} z^{2n}$

3. Calcula la serie de potencias centrada en $a = 1$ de la función $f(z) = \frac{z}{1+z}$. ¿Qué radio de convergencia tiene?

4. Justifica si es verdadera o falsa la siguiente frase:

$$\textit{Existe } f \in \mathcal{H}(D(0,1)) \textit{ tal que } f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3, \quad \forall\, n > 1.$$

¿Y si pedimos que $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$?

1) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \longrightarrow L = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = 4 \Rightarrow$ converge en $D_4(a=2)$

2) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n+1}$, con $w = -z^2/2$

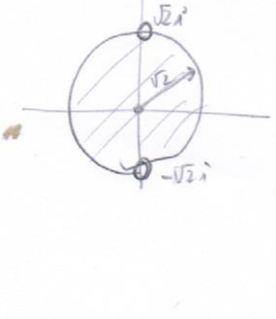
Ahora $f(w) = \sum \frac{w^n}{n+1}$ tiene radio conv $R = 1$, y por el Crit Dirichlet converge $\Leftrightarrow w \in \overline{D} \setminus \{1\}$

(si $w = 1 \Rightarrow f(1) = \sum \frac{1}{n+1} = \infty$)

Por tanto

$S(z)$ converge $\Leftrightarrow -\frac{z^2}{2} \in \overline{D} \setminus \{1\} \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{2}$ y $z^2 \neq -2$

$\Leftrightarrow z \in \overline{D}_{\sqrt{2}}(0) \setminus \{\pm\sqrt{2}i\}$



③ $f(z) = \frac{z}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+z}$

Ahora $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$

$\Rightarrow \quad f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n = \boxed{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n}$

La serie converge $\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \longrightarrow \boxed{R = 2}$

④ a) "$\exists\, f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}, \ \forall n > 1$."

$\boxed{\text{FALSO}}$ Si fuera cierto, tomo $g(z) = z^3$

$\Rightarrow \quad f(z) = g(z) \quad z \in \{\frac{1}{n}\}_{n=2}^{\infty}$

y por cont $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = g(0)$

$\Rightarrow f = g$ en $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\} \overset{PPA}{\Rightarrow} f \equiv g$ en $\mathbb{D}$

Pero $f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \neq g\left(\frac{-1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}$ ↯

b) "$\exists\, f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \ \forall n > 1$"

(V) Simplemente tomar $f(z) = z^2$.