Variable Compleja, 3º Matemáticas Test 3, 2/12/2021

SOLUCIONES

10/

1. Considera la función $f(z) = \frac{(\operatorname{Log} z) - i\frac{\pi}{2}}{(z^2+1)^2}$. Demuestra que tiene un polo en $z = i$, determina su orden y el primer coeficiente no nulo de su serie Laurent.

2. Considera la función $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$. Encuentra una representación en serie de Laurent, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$, en los siguientes anillos

   a) para $z \in D(0; R_1, \infty)$, con R_1 a determinar

   b) para $z \in D(-1; 0, R_2)$, con R_2 a determinar

   La respuesta debe incluir explícitamente los dos primeros términos no nulos de cada serie.

3. Justifica si es verdadera o falsa la siguiente frase:

$$\textit{Existe } f \in \mathcal{H}(D_1'(0)) \textit{ tal que } \lim_{z\to 0} |z|^{1/3}|f(z)| = 2.$$

(1) En primer lugar hay que notar que el numerador es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ y el denominador es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$, luego $\exists R > 0 \ / \ f \in H(D_R'(i))$. Para ver que en "i" hay un polo,

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\operatorname{Log}(z) - i\frac{\pi}{2}}{(z^2+1)^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \text{ indeterminación, uso L'Hopital:}$$

$$\lim_{z\to i} \frac{\frac{1}{z}}{2(z^2+1)2z} = \text{"}\frac{\frac{1}{i}}{2\cdot 0\cdot 2i}\text{"} = \infty$$, luego $f(z)$ tiene un polo en $z = i$ de orden N.

Sabemos que N es el único entero que cumple $\lim_{z\to i} (z-i)^N \cdot f(z) \neq 0$. Veamos que $N = 1$:

$$\lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{\operatorname{Log}(z) - \frac{i\pi}{2}}{(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to i} \frac{\operatorname{Log}(z) - \frac{i\pi}{2}}{(z-i)(z+i)^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \text{ indeterminación, uso L'Hopital}$$

$$\lim_{z\to i} \frac{\frac{1}{z}}{(z+i)^2 + (z-i)2(z+i)} = \frac{1/i}{(2i)^2 + 0\cdot 2\cdot(2i)} = \frac{1/i}{-4} = \frac{-1}{4i} = \frac{i}{4} \neq 0.$$

Así, $N = 1$, y el primer coeficiente no nulo de $g(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-i)^n$ es a_{-1}, con $a_{-1} = \frac{i}{4}$, pues si $f(z) = g(z)$ en un anillo de i, $(z-i)f(z) = (z-i)g(z)$, y

$$\frac{i}{4} = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} (z-i) g(z) = \lim_{z\to i} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-i)^{n+1} = a_{-1}$$

bien explicado.

② $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$

a) Serie para $D(0, R_1, \infty)$:

$\frac{1}{1-z^2} = \cancel{\frac{-1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{-1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-\left(\frac{1}{z^2}\right)^{n+1}}$ ~~si~~ $\cancel{\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1,\ 1<|z|}$

$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{3}{z}-1} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(3)^n}{z^{n+1}}$ si $\left|\frac{3}{z}\right|<1$, $|z|>3$

$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$

$\frac{1}{2}\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{2z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$ si $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, $|z|>1$

$\frac{1}{2}\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$ si $\left|\frac{-1}{z}\right|<1$, $|z|>1$

Sumándolo todo, $f(z) = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z} + \frac{1}{3-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}-(3)^n\right]\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$, si $|z|>3$

$R_1 = 3$, los dos primeros términos son $a_{-1} = \cancel{\frac{-1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - (3)^0 = -1$ y $a_{-2} = \frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}-3 = -4$

b) Serie para $D(-1, 0, R_2)$

$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1}{(z+1)}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(z+1)}\frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{(z+1)}\frac{1/2}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)} = \frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right.$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^n}$ si $\left|\frac{z+1}{2}\right|<1$, $|z+1|<2$

$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{4-(z+1)} = \frac{1/4}{1-\left(\frac{z+1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{4}\right)^n$ si $\left|\frac{z+1}{4}\right|<1$, $|z+1|<4$

Sumándolo todo, $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^n} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^n}$. Con el cambio $n-1=m$, $n=m+1$ en la primera serie,

$f(z) = \sum_{m=-1}^{\infty}\frac{(z+1)^m}{2^{m+2}} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)(z+1)^n$ si $|z+1|<2$

$R_2 = 2$, y los dos primeros términos son $a_{-1} = \frac{1}{2}$ y $a_0 = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$

SOLUCIONES

(3) ~~Si $f \in H(D_1'(0))$, entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ en un anillo de $z=0$ $\Delta = D(0,0,R)$ con $R>0$~~,

(1) Si $f \in H(D_1(0))$, entonces $\lim_{z\to 0} |z|^{1/3} |f(z)| = 0 \cdot |f(0)| = 0 \neq 2$!!

(2) Si ~~$f \notin H(D_1(0))$, es decir~~ f no está definida en 0, o no es continua u holomorfa en 0,

(2.1) f tiene sing. evitable en 0 $\rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = L$ $(L \in \mathbb{C})$ $\rightarrow \lim_{z\to 0} |z|^{1/3} |f(z)| = 0 \cdot |L| = 0 \neq 2$!!

(2.2) f tiene un polo en 0 de orden N $(N \geq 1)$ $\rightarrow \lim_{z\to 0} (z)^N \cdot f(z) = L$,

$$\lim_{z\to 0} |z|^{1/3} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{1/3}}{|z|^N} \cdot |z^N||f(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{1/3}}{|z|^N} \cdot |L| = \infty \neq 2 \text{ !!}$$

(2.3) f tiene sing. esencial en 0 $\rightarrow \nexists \lim_{z\to 0} f(z)$ $\rightarrow$ Por R.A. si $\lim_{z\to 0} |z|^{1/3} |f(z)| = 2$,

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^{1/3}|f(z)|}{|z|^{1/3}} = \frac{\lim_{z\to 0} |z|^{1/3}|f(z)|}{\lim_{z\to 0} |z|^{1/3}} = \text{"}\frac{2}{0}\text{"} = \infty,$$ pero entonces

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \infty \text{ !!}$$

Como en todos los casos hay contradicción no puede existir tal f: la afirmación es falsa.