Variable Compleja, 3º Matemáticas
Examen enero 2023

Nombre y DNI: ....

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demuestra que existe $\Delta = \overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ tal que

   a) $h(z) := \dfrac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}$ es holomorfa en un entorno de Δ

   b) se cumple la siguiente versión de la fórmula de Cauchy

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

   c) Utiliza lo anterior para calcular $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{\operatorname{sen}(2z)}$.

   Nota: 2'5 puntos

2. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(1/n) = 1/(n+1)$, $n = 2, 3, \ldots$

   a) demuestra que $f(1/\pi) = 1/(\pi + 1)$

   b) si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ demuestra que $\sum |a_n| = \infty$.

   Nota: 2 puntos

3. Utiliza el teorema de los residuos para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\, dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Debes justificar adecuadamente las hipótesis y los límites de las integrales que aparezcan.

   Nota: 2 ptos

4. Construye una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1, -2\})$, que cumpla **todas** las propiedades siguientes

   - en $z = 1$ tiene un polo de orden 22
   - en $z = -2$ tiene una singularidad esencial
   - en $z = i$ tiene un cero de orden 44
   - en $z = 0$ vale $f(0) = 1$

   Calcula el valor de $\int_T f(z)(1-z)^{21}\, dz$, donde T es el triángulo $[-i,\ 1+i,\ 2]$.

   Nota: 1'5 ptos

5. **V ó F** (justifica la respuesta):

   a) El polinomio $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ tiene todas sus raíces en el anillo $\{1 < |z| < 2\}$.

   b) Si $z = i \ln(1 + \sqrt{2})$ entonces $\operatorname{sen} z = i$.

   c) La función $f(z) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

   d) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|f(z)| \geq |z|$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, entonces f es un polinomio.

   Nota: 2 ptos

SOL

1) $h(z) = \dfrac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}$, $f\in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0)\neq 0$

a)

(*)

Como $\exists \lim_{z\to z_0} h(z) = \dfrac{1}{f'(z_0)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \left.\begin{array}{l} 0<|h(z)|<\infty \\ 0\neq|z-z_0|<2r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(z)-f(z_0)\neq 0 \\ \text{en } D'_{2r}(z_0) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow h \in \mathcal{H}(D'_{2r}(z_0)) \cap C(D_{2r}(z_0)) \leftarrow \boxed{\text{por } (*)}$

$\overset{\text{Corol C-G}}{\Longrightarrow} h \in \mathcal{H}(D_{2r}(z_0))$

b) Por el Tma Cauchy en discos,

$h \in \mathcal{H}(\underbrace{D_{2r}(z_0)}_{\Omega_1})$ y $z_0 \in \Delta = \overline{D_r(z_0)} \subseteq \Omega_1$

$$\Rightarrow h(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{h(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{\frac{\cancel{z-z_0}}{f(z)-f(z_0)}}{\cancel{z-z_0}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{f(z)-f(z_0)}$$

c) Tomamos $f(z) = \sin(2z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $z_0 = 0$

$\Rightarrow f'(z_0) = 2\cdot\cos(2z_0) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow h(z) = \dfrac{z}{\sin(2z)} \in \mathcal{H}(D_{\frac{\pi}{2}}(0))$ y $\Delta = \{|z|\le 1\} \subseteq D_{\frac{\pi}{2}}(0)$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin(2z)} \overset{(b)}{=} \frac{2\pi i}{f'(0)} = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$$

2) $f \in H(D) \ / \ f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} = \frac{1/n}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1/n}{1+\frac{1}{n}}$ $\forall n = 2, 3 \ldots$ }

a) Sea $g(z) = \frac{z}{1+z} \in H(D) \Rightarrow f(z) = g(z)$ $\forall z \in \{\frac{1}{n}\}_{n=2}^{\infty}$ }

Por cont. $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}) = g(0) = 0$

$\Rightarrow \quad f - g \equiv 0$ en $\{\frac{1}{n}\}_{n=2}^{\infty} \cup \{0\}$ }
que tiene 1 pto acumulación en D }

$\Rightarrow \quad f(z) \equiv g(z) = \frac{z}{1+z} \Rightarrow f(\frac{1}{\pi}) = \frac{1/\pi}{1+\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi+1}$ //

b) Supongo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es la serie de Taylor de f

Como $f(z) = \frac{z}{1+z} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1}$

$= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} z^m \Rightarrow a_m = (-1)^{m-1}, m \geq 1$
$= 0 \quad , m = 0$

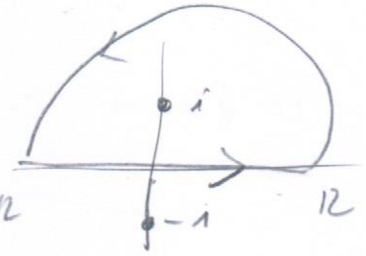
$n+1 = m$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} |a_m| = \infty$ //

③ $I=\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}, \quad a\in\mathbb{R}.$

$\boxed{a=0} \to \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$

$I(a)=I(-a) \to$ suponemos $\boxed{a>0}$



$f(z)=\frac{e^{iaz}}{1+z^2} \in H(\mathbb{C}\setminus\{\pm i\})$

$\Gamma_R = C_R \cup [-R,R]$

Thm Res $\Rightarrow$ $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f,i)$

$= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}\, e^{iaz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{\pi \cancel{2i}\, e^{-a}}{\cancel{2i}}$

$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \frac{|e^{iaRe^{it}}|}{|1+(Re^{it})^2|}R\,dt \le \int_0^\pi \frac{\boxed{e^{-aR\sin t}}}{R^2-1}R\,dt$ $\quad \le 1$

$\left.\begin{array}{l} z=Re^{it} \\ t\in[0,\pi] \end{array}\right\}$ $\quad \le \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi dt = \frac{R\pi}{R^2-1}\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{iat}}{1+t^2}\,dt \overset{TCD \,\otimes}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}\,dt}{1+t^2} = \pi e^{-a}$

Re $\Rightarrow$ $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}\,dt}_{2I} = \pi e^{-a} \Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi e^{-a}}{2}}$

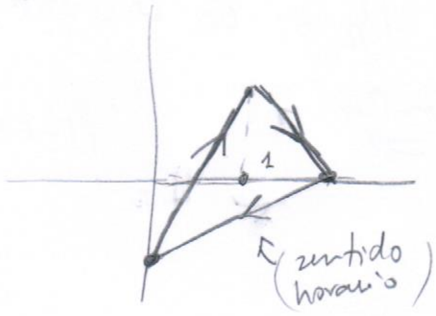
$\otimes$ $\boxed{\text{Justif TCD}}$ $\left(\left|\frac{e^{iat}}{1+t^2}\right| \le \frac{1}{1+t^2}\in L^1(-\infty,\infty)\right)$

4) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{1,-2\})$

$$f(z) = c\cdot \frac{(z-i)^{44}}{(z-1)^{22}} \cdot e^{\frac{1}{z+2}}$$

$$1 = f(0) = c\cdot \frac{(-i)^{44}}{(-1)^{22}}\, e^{\frac{1}{2}} = c\cdot e^{1/2} \Rightarrow \quad c = e^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = e^{-\frac{1}{2}}\cdot \frac{(z-i)^{44}}{(z-1)^{22}}\, e^{\frac{1}{z+2}}}$$ ← cumple las condiciones que piden



$$I = \int_T f(z)(1-z)^{21}\, dz$$

$T = [-i, 1+i, 2]$
↳ sentido horario

$g(z) \in \mathcal{H}$(entorno de(T))

$$\Rightarrow I = -\int_{(\partial T)^-} \frac{e^{-\frac{1}{2}}(z-i)^{44}\, e^{\frac{1}{z+2}}}{z-1}\, dz = 2\pi i \cdot g(1)$$

$$= 2\pi i\, e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{3}}(1-i)^{44}$$ //

5)

5) a) $\boxed{f(z) = z^7 - 5z^3 + 12 \text{ tiene tres raíces en } \{1 < |z| < 2\}}$ (3)

- Veamos raíces en $\{|z| < 1\}$

Si $h(z) \equiv 12 \Rightarrow |f(z) - h(z)| = |z^7 - 5z^3|$

$\leq |z|^7 + 5|z|^3 = 6 < 12$

$(|z|=1)$

$\Rightarrow Z_f(\mathbb{D}) = Z_h(\mathbb{D}) = 0$

- Veamos raíces en $\{|z| < 2\}$

Si $g(z) = z^7$

$\Rightarrow |f(z) - z^7| = |-5z^3 + 12| \leq 5 \cdot |z|^3 + 12$

$= 40 + 12 = 52 < |z|^7 = 128$

$(|z| = 2)$

$\Rightarrow Z_f(D_2(0)) = Z_g(D_2(0)) = 7 \longrightarrow$ (V)

(b) $z = i \ln(1+\sqrt{2}) \Rightarrow$ ¿ sen $z = i$?

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-\ln(1+\sqrt{2})} - e^{\ln(1+\sqrt{2})}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2}\right) = \frac{1 - (1+\sqrt{2})^2}{2i(1+\sqrt{2})} = \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} + 2 + 2\sqrt{2})}{2i(1+\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{1}{i} = i \quad //$$ (V)

(c) $f(z) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}} \rightarrow z = 0$ <u>NO</u> es una aislada,

pues $\operatorname{sen} \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in \pi \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow f$ <u>no</u> es holom. en $\{\frac{1}{n\pi}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ (F)

d) Si $f \in H(\mathbb{C})$ y $\left. \begin{array}{l} |f(z)| \geq |z| \\ \forall z \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \Rightarrow f$ polin.

Como $\lim_{z \to \infty} |f(z)| \geq \lim_{z \to \infty} |z| = \infty$

$\Rightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ y $f \in H(\mathbb{C})$

Por un lema de clase (Tema 7) $\Rightarrow f$ es polin.

V