Variable Compleja, 3º Matemáticas
Examen junio 2023

Nombre y DNI: ....

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, γ un arco cerrado en Ω, y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$ en Ω.

   a) Demuestra a partir de la definición (analítica) de índice que
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = I(f\circ\gamma, 0).$$

   b) Si $f = g^m$, para algún $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $m \in \mathbb{N}$, demuestra que
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} \in m\,\mathbb{Z}.$$

   c) Suponer que Ω tiene la propiedad
   $$\forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f \neq 0 \text{ en } \Omega \implies \exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ g^2 = f. \qquad (\dagger)$$
   Demuestra que Ω es simplemente conexo, es decir que
   $$I(\gamma, a) = 0, \quad \forall\, \gamma^* \subset \Omega, \quad \forall\, a \notin \Omega.$$

   Sugerencia: en c), aplicar b) a la función $f(z) = z - a$ para valores de m adecuados

   Nota: 3 ptos

2. Considera la serie de potencias
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{3n+1}}{(n+1)(n+2)\,3^n}.$$

   a) Calcula el radio y el conjunto de convergencia de la serie (y dibújalo).

   b) Calcula el valor exacto de $f(\sqrt[3]{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}})$ (*Sug:* usar fracciones simples)

   c) Calcula justificadamente el valor de la integral $\displaystyle\int_{|z-1|=3/2} \frac{\cos\big(f(z/2)\big)}{z^3}\,dz$

   Nota: 2'5 ptos

3. Considera la función $f(z) = \dfrac{z^2 \operatorname{Log} z}{16 + z^4}$, y los arcos $C_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

   a) Demuestra que $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

   b) Demuestra que $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = 0$

   c) Demuestra que si $w^4 + 16 = 0$ entonces $\operatorname{Res}(f, w) = \frac{\operatorname{Log} w}{4w}$.

   d) Utiliza lo anterior y el teorema de los residuos, para calcular el valor de la integral
   $$\int_0^\infty \frac{t^2\,\ln t}{16 + t^4}\,dt$$

   Extra: Se valorará llegar a la expresión simplificada $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}(\frac{\pi}{2} + 2\ln 2)$.

   Nota: 2'5 ptos

4. **V/F:** (responde justificadamente)

   a) Si $\lim \frac{a_n}{2^n} = i$, entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^\infty a_n(z-1)^n$ converge en $|z - \frac{3}{4}| < \frac{1}{4}$

   b) Si z_1, z_2 están en el semiplano superior, entonces $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$

   c) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $f(2z) = f(z)$ entonces f es constante

   d) La función $f(z) = \sinh z$ es periódica

   Nota: 2 ptos

1. a). Utilizando la def analítica (conocida como representación integral):

$$I(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z-0}\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(w)\,dw}{f(w)-0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}.$$

T.C.V.: $z=f(w)$, $dz=f'(w)\,dw$

b) Sup. $f=g^m$ para alguna $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $m\in\mathbb{N}$. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{m\,g(z)^{m-1}g'(z)}{g(z)^m}dz=m\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

$\underset{\text{apart. a)}}{=} m\,I(g\circ\gamma,0)\in m\mathbb{Z}$ pues sabemos que $I(g\circ\gamma,0)\in\mathbb{Z}$ (Tema 6) ($g\circ\gamma$ es arco cerrado por serlo γ y $g\in\mathcal{H}(\Omega)$).

c) Sup. (†). P.D: $I(\gamma,a)=0$ $\forall\gamma^*\subseteq\Omega$ $\forall a\notin\Omega$. (Sea $\gamma^*\subseteq\Omega$ y $a\notin\Omega$):

$$I(\gamma,a)\underset{\text{def}}{=}I(\gamma-a,0)\underset{f(z)=z-a}{=}I(f\circ\gamma,0)\underset{a)}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}\underset{\text{b) con } m=2,\ g^2=f}{\in}2\mathbb{Z}.$$

Sup. P.R.A. que $I(\gamma,a)=k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Para f ($f\neq0$) $\exists g_1\in\mathcal{H}(\Omega)$ tq $g_1^2=f$ (y $g_1\neq0$, ó o sería $f=0$). Luego volviendo a aplicar c) $\exists g_2\neq0$ y holomorfa en Ω tq $g_2^2=g_1\Rightarrow g_2^4=g_1^2=f$. Recursivamente tendremos que $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists g_n$ tq $g_n^{2^n}=f$. Y entonces, por b):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}\in2^n\mathbb{Z}.$$

Ahora, k es un número fijo, luego $\exists N$ muy grande tq $2^N>|k|$ pero por lo anterior: $k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}\in2^N\mathbb{Z}$. Y la única opción que queda es $k=0$ ↯. Luego efectivamente era $I(\gamma,a)=0$.

Por tanto, Ω es SC-a.

Bien

2. a)

$$f(z) = \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n z^{3n+1}}{(n+1)(n+2)3^n} = z\sum_{n\ge 0}\frac{(-z^3)^n}{(n+1)(n+2)3^n} = z\sum_{n\ge 0}\frac{(-z^3/3)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

Llamando $w=-z^3/3$, estudiamos $\sum_{n\ge 0}\frac{w^n}{(n+1)(n+2)}$. Usando el criterio del cociente:

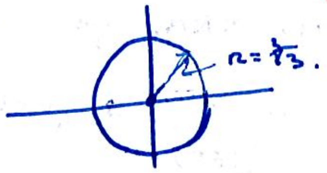
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+2)(n+3)}{1/(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^2+5n+6} = 1 = L$$

$\Rightarrow R = 1/L = 1$. Y podemos aplicar el ejercicio 12 H5 para tener que como $\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{a_n} > 0\ \forall n$ y $a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n\ge 0}\frac{w^n}{(n+1)(n+2)}$ converge $\forall w\in\overline{D}\setminus\{1\}$.

Y en el 1 tenemos $\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, que también converge por tener el mismo carácter que $\sum_{n\ge 0} 1/n^2$ (problema de Basilea). Ahora:

$-z^3/3 = w\in\overline{D} \iff |z^3/3|\le 1 \iff |z|^3\le 3 \iff |z|\le\sqrt[3]{3}$. Luego

$\boxed{\text{converge } \forall z\in\overline{D_{\sqrt[3]{3}}}(0)}$. ($R=\sqrt[3]{3}$ radio de convergencia)



b) Para ello vamos a sumar $\sum_{n\ge 0}\frac{w^n}{(n+1)(n+2)}$.

(No olvides la z.)

Pero lo menos ~~at~~ en el punto concreto que se nos pide. $z=\sqrt[3]{3}\,e^{i\pi/3} \Rightarrow w = -\frac{(\sqrt[3]{3}\,e^{i\pi/3})^3}{3} = -\frac{(3\overbrace{e^{i\pi}}^{-1})}{3} = 1.$

Luego tenemos que sumar $\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n\ge 0}\left(\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}\right) = \eth$

Momento:
$1 = A(n+2)+B(n+1)$
$\to n=-2:\ -B=1$
$\to n=-1:\ A=1$

$$\eth = \sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

una telescópica

$$= \left(1-\frac12\right)+\left(\frac12-\frac13\right)+\left(\frac13-\frac14\right)+\dots \overset{(*)}{=} 1.$$

Y por tanto: $f(\underbrace{\sqrt[3]{3}\,e^{i\pi/3}}_{z}) = z\underbrace{\sum_{n\ge 0}\frac{(-z^3/3)^n}{(n+1)(n+2)}}_{1\text{ por lo anterior}} = \boxed{\sqrt[3]{3}\,e^{i\pi/3}}$.

---

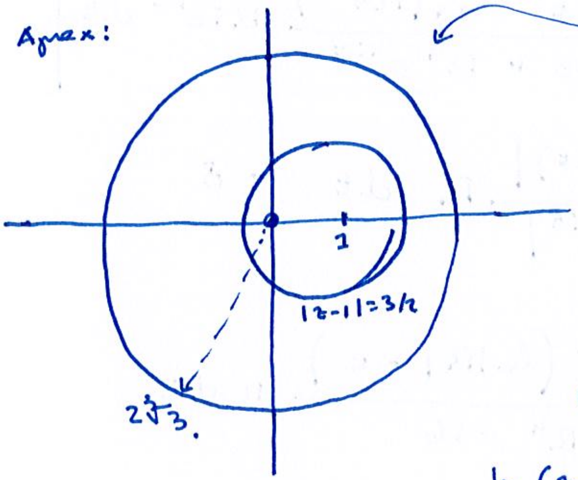
* Puede justificarse más con sumas parciales:
$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \left(1-\cancel{\tfrac12}\right)+\left(\cancel{\tfrac12}-\cancel{\tfrac13}\right)+\dots+\left(\cancel{\tfrac{1}{N+1}}-\frac{1}{N+2}\right) \underset{\uparrow\ \text{telescópica}}{=} 1-\frac{1}{N+2}\xrightarrow[N\to\infty]{} 1.$$

(Nota: hubo un cambio en el enunciado dado por el profesor durante el examen). $1/2 \to 3/2$.

c) ¿ $\displaystyle\int_{|z-1|=3/2} \frac{\cos(f(z/2))}{z^3}\,dz$? Consideramos la función $h(z) := \cos(f(z/2))$.

Nótese que al ser $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $f(z) \in \mathcal{H}(D_{\sqrt[3]{3}}(0))$ (por estar definida como serie), h es holomorfa allí donde $z/2 \in D_{\sqrt[3]{3}}(0)$ $\iff z \in D_{2\sqrt[3]{3}}(0)$. ✓ Tenemos pues:

Aprox:



Y estamos en condiciones de aplicar la fórmula de derivada de Cauchy:

$$\int_{|z-1|=3/2} \frac{h(z)}{z^3}\,dz = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}!}\, h''(0).$$

Calculamos $h''(0)$.

$$h(z) = \cos(f(z/2))$$
$$\Rightarrow h'(z) = -\operatorname{sen}(f(z/2))\, f'(z/2)\, \tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow h''(z) = -\cos(f(z/2))\, f'(z/2)^2\, \tfrac{1}{4}$$
$$-\operatorname{sen}(f(z/2))\, f''(z/2)\, \tfrac{1}{4}.$$ Como $f(0)=0$,

evaluamos ~~cos~~ $h''(0) = \underbrace{-\cos(0)}_{1}\, f'(0)^2\, \frac{1}{4} - 0$ $(\operatorname{sen}(0)=0)$.

Y sólo queda ver quién es $f'(0)^2$.

$$f'(z) = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{3n+1}}{(n+1)(n+2)3^n}\right)' = \sum_{n\geq 0} \frac{(3n+1)(-1)^n z^{3n}}{(n+1)(n+2)\,3^n}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{(1)(-1)^0}{1\cdot 2\cdot 3^0} = \frac{1}{2}. \Rightarrow f'(0)^2 = \frac{1}{4}.$$

el único sumando no nulo es $n=0$

Y por tanto, $h''(0) = -\frac{1}{4}\frac{1}{4} = -\frac{1}{16}$, con lo que tenemos:

$$\boxed{\int_{|z-1|=3/2} \frac{h(z)}{z^3}\,dz = \pi i\left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi i}{16}}$$ ✓

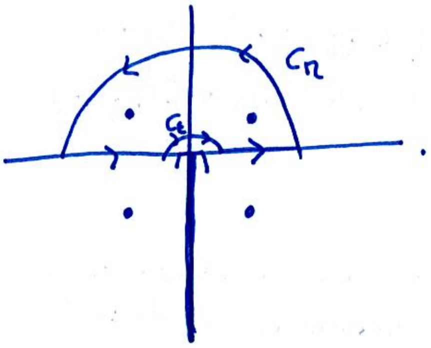
Bien

h.

3. Consideramos $f(z)=\frac{z^2\log(z)}{16+z^4} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus \sqrt[4]{-16})$ ← polos simples. $\setminus (-\infty,0]i$

Entendemos que usamos $\text{Log}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}$.

$\sqrt[4]{-16}=\{2e^{i\pi/4},\ 2e^{i3\pi/4},\ 2e^{i5\pi/4},\ 2e^{-i\pi/4}\}$



a) ¿$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$?

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{R^2e^{2it}\log(Re^{it})}{16+R^4e^{4it}}\, Rie^{it}\,dt\right|$$

$C_R(t)=Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

$$\le \int_0^\pi \frac{R^2|\log(Re^{it})|}{|16+R^4e^{4it}|}R\,dt = \overset{+}{o}$$

$$\overset{+}{o} \le \int_0^\pi \frac{R^2|\ln|R|+it|}{R^4-16}R\,dt \le \int_0^\pi \frac{R^2(\ln|R|+t)}{R^4-16}R\,dt$$

$$\le \int_0^\pi \frac{R^2(\ln|R|+\pi)}{R^4-16}R\,dt = \pi\frac{R^3(\ln|R|+\pi)}{R^4-16}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

por comparación de infinitos (FUVR).

b) $$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\varepsilon^2e^{2it}\log(\varepsilon e^{it})}{16+\varepsilon^4e^{4it}}\,\varepsilon ie^{it}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^\pi \frac{\varepsilon^3|\log(\varepsilon e^{it})|}{|16+\varepsilon^4e^{4it}|}dt \le \int_0^\pi\frac{\varepsilon^3|\ln|\varepsilon|+\overset{\le\pi}{t}|}{16-\varepsilon^4}dt \le \int_0^\pi \frac{\varepsilon^3(\pi+|\ln|\varepsilon||)}{16-\varepsilon^4}dt$$

$$=\pi\frac{\varepsilon^3(\pi+|\ln|\varepsilon||)}{16-\varepsilon^4}\xrightarrow{\varepsilon\to0^+}0$$ pues $\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^3\pi=0$ y $\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^3|\ln|\varepsilon||=0$ por comparación de infinitos otra vez (FUVR).

Bien!

c) Sea $w\in\sqrt[4]{-16}$.* Sabemos que son polos simples.

Entonces: $$\text{Res}(f,w)=\lim_{z\to w}(z-w)\frac{z^2\log(z)}{16+z^4}$$

$$=\frac{1}{4z^3}z^2\log(z)\Big|_{z=w} = \boxed{\frac{\log(w)}{4w}}.$$

producto de límites y L'Hôp.

*La entendemos multievaluada, no principal, por supuesto a). ¿ $\int_0^\infty \frac{t^2 \ln t}{16+t^4}\,dt$? (Nota, luego nos quedamos con la parte real)

Consideramos $\Gamma_{R,\varepsilon} = \underset{I_1}{[-R,-\varepsilon]} \cup \underset{I_2}{C_\varepsilon} \cup \underset{I_3}{[\varepsilon,R]} \cup \underset{I_4}{C_R}$. Por el

teorema de los residuos:

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{\log(2e^{i\pi/4})}{4\cdot 2e^{i\pi/4}} + \frac{\log(2e^{i3\pi/4})}{4\cdot 2e^{i3\pi/4}}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\ln|2| + i\pi/4}{8(1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\ln|2| + i\,3\pi/4}{8(-1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{(\ln|2|+i\pi/4)(-1+i) + (\ln|2|+i\,3\pi/4)(1+i)}{8(i+1)(i-1)}\right)\sqrt{2}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\left(-\ln|2| - \frac{\pi}{4}\right) - i\frac{\pi}{4} + i\ln|2| + \left(\ln|2| - \frac{3\pi}{4}\right) + i\ln|2| + i\frac{3\pi}{4}}{8\,\cancel{(-1-1)}}\right)\sqrt{2}$$

✓

$$= -\pi i\sqrt{2}\left(i\left(2\ln|2| + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right)\frac{1}{8}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left(2\ln|2| + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2 i\sqrt{2}}{8}.$$ Y ahora:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{z^2\log(z)}{16+z^4}\,dz \underset{\substack{\xi=-z \\ dz=-d\xi}}{=} -\int_R^\varepsilon \frac{\xi^2\log(-\xi)}{16+\xi^4}\,d\xi \;\cancel{= \int_\varepsilon^R \frac{\xi^2\log(\xi)}{16+\xi^4}\,d\xi}$$

✓

$$= \int_\varepsilon^R \frac{\xi^2\log(-\xi)}{16+\xi^4}\,d\xi$$ y

~~para $\mathrm{Log}_{(-\pi/2,\,3\pi/2)}$, $\log(z)=\log(-z)$~~

entonces:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left(2\ln|2| + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2 i\sqrt{2}}{8} = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}}\left(I_1 + \underset{\downarrow\,0}{I_2} + I_3 + \underset{\downarrow\,0}{I_4}\right)$$

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}}\left(\int_\varepsilon^R \frac{\xi^2(\ln|\xi| + i\pi)}{16+\xi^4}\,d\xi + \int_\varepsilon^R \frac{z^2(\ln|z| + 0)}{16+z^4}\,dz\right)$$ y tomando partes reales:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left(2\ln|2| + \frac{\pi}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} \frac{t^2 \ln|t|}{16 + t^4}\, dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{t^2 \ln|t|}{16 + t^4}\, dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\left(2\ln|2| + \frac{\pi}{2}\right).}$$

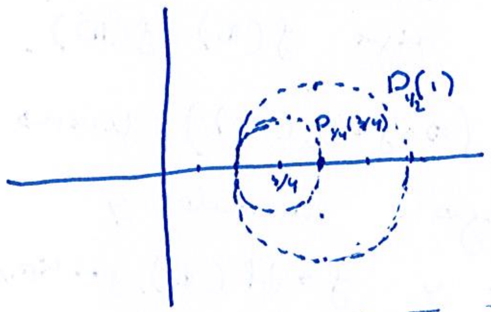
Perfeito!

4. a) <u>Verdadero</u>. Veámoslo. ¿Radio de convergencia de $\sum_{n\geq 1} a_n (z-1)^n$? Usamos el criterio del cociente:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|/2^{n+1}}{|a_n|/(2^n\cdot 2)} \underset{\uparrow}{=} \left|\frac{i}{i/2}\right| = 2 \Rightarrow R = 1/2$$

por hip. y álgebra de límites.

Representamos pues la región de convergencia y vemos si contiene a $\{|z-\frac{3}{4}|<\frac{1}{4}\}$.



Y como $D_{1/4}(3/4) \subset D_{1/2}(1)$ donde hay convergencia, la afirmación dada es verdadera.

Bien

---

b) <u>Falso</u>. Lo explico y doy un contraejemplo. Como $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^+$, $z_1, z_2 \neq 0$ y se tiene $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

Entonces:

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \ln|r_1| + \ln|r_2| + i\,\overline{\theta_1+\theta_2}^{(-\pi,\pi]}$$

$$\mathrm{Log}(z_1)+\mathrm{Log}(z_2) = \ln|r_1| + \ln|r_2| + i(\theta_1+\theta_2)$$

y se tiene la igualdad $\iff \overline{\theta_1+\theta_2}^{(-\pi,\pi]} = \theta_1+\theta_2$. Pero esto no ocurre en general pues puede ser $\theta_1+\theta_2>\pi$. Tómese:

$z_1 = e^{i3\pi/4}$ y $z_2 = e^{i\pi/2}$. Entonces:

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = i\,\overline{(3\pi/4+\pi/2)}^{(-\pi,\pi]} = -i\frac{3\pi}{4}.$$

$$\neq$$

$$\mathrm{Log}(z_1)+\mathrm{Log}(z_2) = i\,(3\pi/4+\pi/2) = i\frac{5\pi}{4}.$$

Bien

c) Verdadero. Veamos que una función f tal cumplirá $f(\mathbb{C}) = f(\overline{\mathbb{D}})$. Claramente $f(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq f(\mathbb{C})$. Para el otro contenido, sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces, si $z=0$, OK. Si $z \neq 0$, por el teorema de representación, $z = |z| e^{i\theta}$. Ahora, como $|z|/2^n \to 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $|z|/2^N < 1$, de forma que $\tilde{z} = \frac{|z|}{2^N} e^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Ahora:

(Si $N > 1$, si no este término sobra, está para dar la idea).

$$f(z) = f\Big(2^N \underbrace{\frac{|z|}{2^N} e^{i\theta}}_{\tilde{z}}\Big) \underset{\text{hipótesis}}{=} f\Big(2^{N-1} \frac{|z|}{2^N} e^{i\theta}\Big) = f\big(2^{N-2}\, \tilde{z}\big) \underset{\text{(recursivamente)}}{= \dots =} f(\tilde{z}).$$

Y por tanto, $f(z) \in f(\overline{\mathbb{D}})$. De aquí se sigue $f(\mathbb{C}) = f(\overline{\mathbb{D}})$.

Ahora, como $\overline{\mathbb{D}}$ es compacto y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ($\Rightarrow f \in C(\mathbb{C})$), tenemos $f(\mathbb{C}) = f(\overline{\mathbb{D}})$ es compacto en $\underbrace{\mathbb{C} \sim_m \mathbb{R}^2}_{(*)}$ luego es cerrado y acotado. Con lo cual, f es acotada y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, por hip., con lo que del teorema de Liouville se sigue que f ha de ser cte. ■

Bien ✓

---

d) Verdadero. Veámoslo. No lo es restringida a $\mathbb{R}$, pero sí en $\mathbb{C}$ y la periodicidad nos viene heredada de la de e^z, $z \in \mathbb{C}$.

$\operatorname{senh}(z)$ es $(2\pi i)$-periódica. Sea $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{senh}(z + 2k\pi i) = \frac{e^{z+2k\pi i} - e^{-z-2k\pi i}}{2}$$

$$\underset{\substack{\tilde{k}=-k \\ \in \mathbb{Z}}}{=} \frac{e^{z+2k\pi i} - e^{-z+2\tilde{k}\pi i}}{2} \underset{\substack{\text{periodicidad} \\ \text{de } e^z}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{senh}(z).$$

Y esto ocurre $\forall k \in \mathbb{Z}$. ■

✓

¡Nota: Para e^z se tenía:

$$e^{z+2\pi i k} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Y esto es lo que hemos usado. (Tema 3).

Nota (*). Al escribir $\mathbb{C} \sim_m \mathbb{R}^2$ queremos decir que son métricamente equivalentes. De hecho, $\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual al que se ha dado estructura de cuerpo con las operaciones $+, *$. (Recordar Tema 1).