SOLUCIONES

10

1.- Calcula las siguientes integrales. En todos los casos, debes justificar claramente el uso del teorema de Cauchy, dibujando las curvas, los puntos y las regiones de holomorfía que consideres.

a) Si $\Delta = \overline{D_1(2i)}$, demuestra que

$$\int_{\partial\Delta} \frac{\mathrm{Log}\,(z)}{z^2+2}\,dz = \frac{\pi \ln 2 + i\pi^2}{2\sqrt{2}}.$$

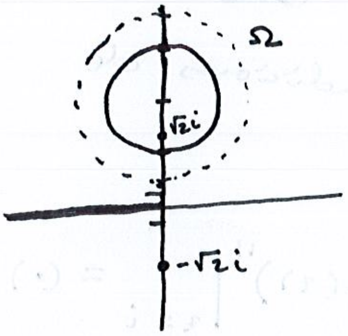
b) Para $a > 1$, demuestra que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|a - e^{it}|\,dt = 2\pi \ln(a)$.

c) Si $S(z) = \displaystyle\int_0^z \sqrt{w-2i}\,dw$, demuestra que

$$\int_{|z+1|=3/2} \frac{z\,S(z)}{(z-i)^3}\,dz = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}(1+i).$$

a) Nótese: $z^2+2 = (z+\sqrt{2}\,i)(z-\sqrt{2}\,i)$. Luego se puede:

$$\int_{\partial\Delta} \frac{\mathrm{Log}(z)}{z^2+2}\,dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)}\,dz = (\cdot)$$



Nótese que $\underbrace{\dfrac{\mathrm{Log}(z)}{z+\sqrt{2}\,i}}_{:=f(z)} \in \mathcal{H}\big(\underbrace{D_{3/2}(2i)}_{\Omega}\big)$

y que $\sqrt{2}\,i \in \mathring{\Delta}$, pues

$|2i - \sqrt{2}\,i| = |2-\sqrt{2}\,i| = 2-\sqrt{2} < 1$, pues $1 < \sqrt{2}$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar la fórmula de Cauchy en el disco:

$$(\cdot) = 2\pi i\, f(\sqrt{2}\,i) = 2\pi i\left(\frac{\mathrm{Log}(\sqrt{2}\,i)}{2\sqrt{2}\,i}\right)$$

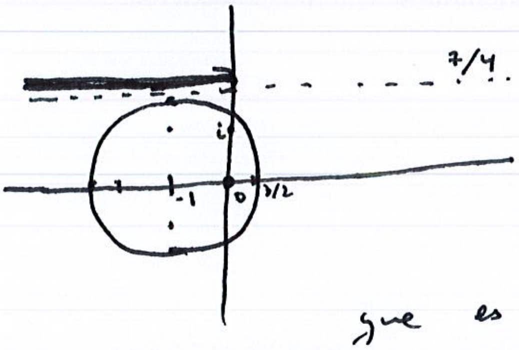
$$= 2\pi\,\frac{\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\pi\ln 2 + i\pi^2}{2\sqrt{2}}} \quad \text{c.q.v.}$$

c) $w - 2i \notin \cancel{[0,+\infty)}\ (-\infty, 0] \iff w \notin \{(-\infty,0] + 2i\}$ (Espero que se entienda lo que digo, obsérvese el gráfico).

$\cancel{\{[0,+\infty) + \{2i\}\}}$

$\{\cancel{[0,+\infty)}\ (-\infty,0] + 2i\}$.

Tenemos el siguiente gráfico de sitios a considerar:



Nótese que, identificando con $\mathbb{R}^2$, podemos restringir nuestro estudio a, por ejemplo $\mathbb{R} \times (-\infty, 7/4]$.

$\sqrt{w-2i}$ es holomorfa en $\mathbb{R} \times (-\infty, 7/4)$, que es abierto y, de hecho, estrellado pudiéndose tomar $z_0 = 0$. Por la holomorfía, sabemos que tendremos, como corolario a la misma en Cauchy-Goursat, una primitiva a esta región y, como nos decía la caracterización de existencia de primitivas para continuas sobre estrellados, esta puede escribirse precisamente como $\int_0^z \sqrt{w-2i}\, dw$.

Por tanto $S(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times (-\infty, 7/4))$ con $S'(z) = \sqrt{z-2i}$.

$\Rightarrow z\,S(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times (-\infty, 7/4))$. Además, como $i \in \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+1| \overset{<}{\le} 3/2\}$, estamos en condiciones de aplicar Cauchy para derivadas.

$$\int_{|z+1|=3/2} \frac{z S(z)}{(z-i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} \cancel{(zS(z))}\ \cancel{(iS(i))}\ (z S(z))''\Big|_{z=i} = (*)$$

$$(z S(z))''\Big|_{z=i} = \left(S(z) + z\sqrt{z-2i}\right)'\Big|_{z=i} = \left(\sqrt{z-2i} + \sqrt{z-2i} + \frac{z}{2\sqrt{z-2i}}\right)\Big|_{z=i} =$$

$\boxed{\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4}}$

$$= 2\, e^{-i\pi/4} + \frac{i}{2\, e^{-i\pi/4}} \cancel{= 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow (*) = \pi i\, 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\pi i + \pi\sqrt{2} - \pi\frac{\sqrt{2}}{4} - \pi i \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}(1+i)}, \text{ c.q.v.}$$

¡Recordemos que estamos trabajando con raíces principales!

(*) ¿En pg. 4.

b).

$$\int_0^{2\pi} \ln|a-e^{it}|\,dt = \Re\left(\underline{\int_0^{2\pi} \log(a-e^{it})\,dt}\right)$$

Calculemos esta.

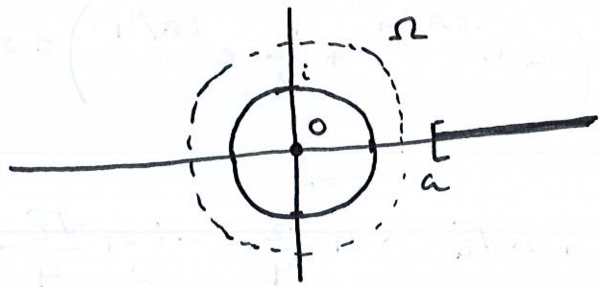
$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Hacemos } z = e^{it} \\ &\to dz = ie^{it}\,dt \\ &\to dt = -\frac{i}{z}\,dz \end{aligned}}$$

$$\int_0^{2\pi} \log(a-e^{it})\,dt$$

$$= -i\int_{|z|=1} \frac{\log(a-z)}{z-0}\,dz$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a-z \notin (-\infty, 0] \\ &\Leftrightarrow z-a \notin [0,+\infty) \\ &\Leftrightarrow z \notin [a,+\infty),\quad a>1. \end{aligned}}$$

Tenemos el siguiente gráfico de sitios a considerar:



Y estamos en condiciones de aplicar ~~el~~ la fórmula de Cauchy en el disco, basta considerar $\Omega = D_0\left(1 + \frac{a-1}{2}\right)$, donde $\operatorname{Log}(a-z)$ es ~~holomorfa~~ holomorfa, con $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1\} \subseteq \Omega$ y $0 \in \mathring{\Delta}$. Entonces:

$$\underbrace{-i}_{=1/i}\int_{|z|=1} \frac{\log(a-z)}{z-0}\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{i}\,\log(a-0) \overset{a\in(1,+\infty)\subset\mathbb{R}}{=} 2\pi\ln|a| = 2\pi \ln a \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} \ln|a-e^{it}|\,dt = 2\pi\ln(a)}, \text{ c.q.v.}$$

Algunas notas al apartado c).

$\Delta :=$ ~~[illegible]~~ $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+1| < 3/2\}$. Se tiene $\overline{\Delta} \subseteq \mathbb{R} \times (-\infty, 7/4)$, pues $\sup\{\Im(z) \,/\, z \in \overline{\Delta}\} = 3/2 < 7/4$. Además, $i \in \Delta$ pues $|1+i| = \sqrt{2} < 3/2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9$ ✓.