Variable Compleja, 3º Matemáticas Test 2, 9/11/2022

10

SOLUCIONES ....

1. Considera la serie de potencias $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} z^{2n}$

   a) Determina su radio de convergencia R

   b) Determina la convergencia cuando $z \in \partial D_R(0)$, y dibuja la región correspondiente

   c) Expresa la suma $S(z)$ en términos de funciones elementales

   d) ¿Admite $S(z)$ una extensión holomorfa a un abierto mayor que $D_R(0)$? (en su caso, calcula y dibuja dicho abierto).

2. **V/F:** Existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$\left(f\left(\frac{e^{i\pi/n}}{n}\right)\right)^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{y} \quad f(2) = 2.$$

1.
a)
Como

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n$$

si hacemos el cambio $w = -\frac{z^2}{2}$, obtendríamos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} w^n$$

cuyo radio de convergencia lo calculamos con el criterio del cociente, donde $a_n = \frac{1}{n+1}$, así como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+1} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

entonces $R' = 1/1 = 1$, pero este no es el radio de nuestra serie original, pero si deshacemos el cambio

✓

$$|w| < 1 \iff \left|-\frac{z^2}{2}\right| < 1 \iff |-z^2| < 2 \iff |z| < \sqrt{2}$$

luego $R = \sqrt{2}$.

b)

Con el cambio obtenemos la serie

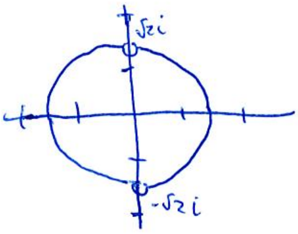
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} w^n$$

donde los $a_n \searrow 0$, luego la serie converge en $w \in \overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$, donde además para $w = 1$ se tendría una serie con el mismo comportamiento que la armónica, luego divergería en 1, así deshaciendo el cambio

$$w \in \overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\} \iff -\frac{z^2}{2} \in \overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\} \iff z^2 \in \overline{D_2(0)}\setminus\{-2\} \iff$$

$$\iff z \in \overline{D_{\sqrt{2}}(0)}\setminus\{\pm\sqrt{2}\, i\}$$

Así convergería en



c)

En el cambio, hacemos

$$w \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} w^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{n+1}}{n+1} = -\operatorname{Log}(1-w)$$

puesto que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n \overset{(|w|<1)}{\underset{(\{|w|<1\})}{=}} \frac{1}{1-w} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{n+1}}{n+1} = -\operatorname{Log}(1-w) + C_1$$

ya que $-\operatorname{Log}(1-w) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus[1,+\infty))$ y $(-\operatorname{Log}(1-w))' = \dfrac{1}{1-w}$, además como en $w = 0$ se tiene que anular, $C_1 = 0$.

Bien justificado

Así tendríamos para $w \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} w^n = -\frac{\operatorname{Log}(1-w)}{w}$$

donde se extiende en 0 con valor 1 por continuidad.

1.c) *

Así, deshaciendo el cambio, si $z \in D_{\sqrt{2}}(0)\setminus\{0\}$

$$S(z) = -\frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{z^2}{2}\right)}{-\frac{z^2}{2}} = \frac{2\operatorname{Log}(1+z^2/2)}{z^2}$$

con $S(0)=1$.

d)

Trabajando por simpleza con el cambio, veamos cuando

$$T(w) = -\frac{\operatorname{Log}(1-w)}{w} \quad \text{si } w\neq 0 \qquad T(0)=1$$

es holomorfa, que evidentemente es en $\Omega = \mathbb{C}\setminus[1,+\infty)\cup\{0\}$, puesto que el denominador se anula en 0, $\operatorname{Log}(z)\in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus(-\infty,0])$ y

$$1-w\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \iff w-1\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty) \iff w\in \mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$$

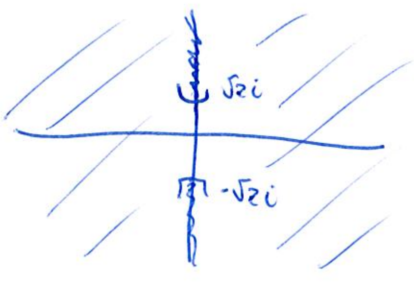
además es continua en $\Omega\cup\{0\}$, luego por C-G mejorado, la función es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$.

Deshaciendo el cambio

$$w \in \mathbb{C}\setminus[1,+\infty) \iff -\frac{z^2}{2}\in \mathbb{C}\setminus[1,+\infty) \iff$$

$$\iff z^2 \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,-2] \iff z\in\mathbb{C}\setminus L_{\pi/2}\cup L_{-\pi/2}$$

donde $L_\alpha = \{(\sqrt{2}+r)e^{i\alpha} : r\in[0,+\infty)\}$, luego para la variable z sería holomorfa en



Luego como $S(z)$ y $f(z)$ coinciden en $D_{\sqrt{2}}(0)$, por el principio de prolongación analítica $S(z)$ se puede extender de forma holomorfa en $\mathbb{C} \setminus L_{\pi/2} \cup L_{-\pi/2}$, donde $f: \mathbb{C} \setminus L_{\pi/2} \cup L_{-\pi/2} \to \mathbb{C}$ viene dada por:

$$(S(z)=)\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{Log}(1+z^2/2)}{z^2} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus L_{\pi/2} \cup L_{-\pi/2} \cup \{0\} \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

ya que $w = 0 \iff z = 0$.

2. Falso

Supongamos que existe dicha función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y definimos la función

$g(z) = 1 - f^2(z)$, entonces $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ claramente y

$$g\left(\frac{e^{i\pi/n}}{n}\right) = 1 - \left(f\left(\frac{e^{i\pi/n}}{n}\right)\right)^2 = 0 \quad \text{(por hipótesis)}$$

además como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{i\pi/n} \nearrow e^{i0} = 1}{n} = 0$$

tendríamos que

$$g(0) = g\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{e^{i\pi/n}}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

luego

$$\left\{ \frac{e^{i\pi/n}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \subseteq Z_g(\mathbb{C})$$

donde el 0 es un punto de acumulación de $Z_g(\mathbb{C})$, luego por el principio de prolongación analítica $g \equiv 0$.

Tendríamos entonces que $f^2(z) = 1$ en todo $\mathbb{C}$, pero

$$f^2(2) = 2^2 = 4 \neq 0$$

luego hemos llegado a un absurdo que demuestra que no puede existir dicha f.