Variable Compleja, 3º Matemáticas **Test 3, 1/12/2022**

Nombre:

. . . .

1. Clasifica las singularidades de las siguientes funciones

$$f_1(z) = \frac{1 - z\cos(\pi z)}{z+1}, \quad f_2(z) = \frac{z^2}{[\mathrm{Log}\,(z+1)]^2 - z^2}, \quad f_3(z) = \frac{e^{1/z} - e^{-1/z}}{1/z},$$

determinando su tipo y orden (en el caso de polos), y calculando el primer coeficiente no nulo de su serie de Laurent[1].

2. Considera la función

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{2z+2}{z^2+1}.$$

a) Dibuja la región donde $f(z)$ es holomorfa, y determina cuáles son los anillos $A(0; R_1, R_2)$, centrados en $z = 0$, donde f admite un desarrollo de Laurent.

b) Desarrolla $f(z)$ en serie de Laurent en el anillo de a) que contiene a la circunferencia $\{|z| = 3/2\}$. Da una expresión explícita para los coeficientes a_0, a_{-1} y a_{-4}.

1a $\quad f_1(z) = \dfrac{-z\cdot\cos(\pi z) + 1}{z+1} \in H(\mathbb{C}\setminus\{-1\}) \Rightarrow$ sing aislada en $z=-1$

. Notar que $h(z) = -z\cos(\pi z)$ cumple $h(-1) = -1$

$\Rightarrow \lim_{z\to -1} f_1(z) = \lim_{z\to -1} \dfrac{h(z) - h(-1)}{z-(-1)} = h'(-1) = \left(-\cos(\pi z) + z\pi\,\mathrm{sen}(\pi z)\right)\Big|_{z=-1} = 1$

$\rightarrow z=-1$ es sing evitable de $f_1(z)$ y $a_0 = 1$.

1b $\quad f_2(z) = \dfrac{z^2}{(\mathrm{Log}(z+1))^2 - z^2} = \dfrac{z^2}{(\mathrm{Log}(z+1) - z)\cdot(\mathrm{Log}(z+1) + z)} \rightarrow$ piden estudiar la sing $\boxed{z=0}$

Notar que $\mathrm{Log}(z+1) \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$. $\supset |z|<1$

$\mathrm{Log}(z+1) - z = \cancel{z} - \frac{z^2}{2} + O(z^3) - \cancel{z}$

$\mathrm{Log}(z+1) + z = z - \frac{z^2}{2} + O(z^3) - z = 2z - \frac{z^2}{2} + O(z^3)$

$\Rightarrow (\mathrm{Log}(z+1))^2 - z^2 = -\frac{z^2}{2}(1 + O(z))\cdot 2z\left(1 - \frac{z}{4} + O(z^2)\right)$

$= -z^3(1 + O(z))^2 = -z^3(1 + O(z))$.

$\Rightarrow f_2(z) = \dfrac{z^2}{-z^3\cdot(1+O(z))} = -\dfrac{1}{z}\cdot\boxed{\dfrac{1}{1+O(z)}}$ $\quad h(z) \in H(|z|<1)$ con $h(0)=1$

$\Rightarrow$ polo en $z=0$ de orden 1 con $\boxed{a_{-1} = -1}$

[1] No es necesario calcular la serie, sólo el coeficiente pedido. En b), estudiar sólo la singularidad $z = 0$.

1c $f_3(z) = \dfrac{e^{1/z} - e^{-1/z}}{1/z} = z\cdot\left(e^{1/z} - e^{-1/z}\right)$

$$= z\left(\cancel{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} - \left(\cancel{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}\right)\right) \quad \leftarrow \text{se cancelan } n = \text{par}$$

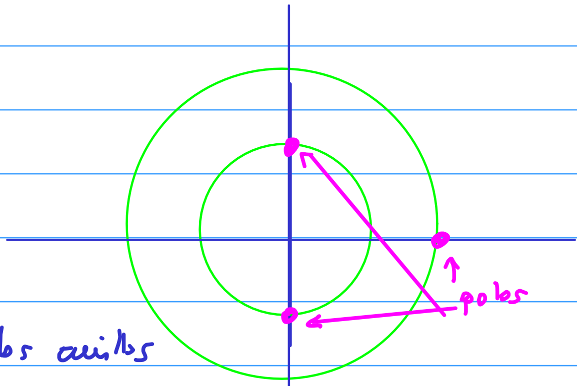
$$= z\cdot\left(\frac{2}{z} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} z^{-2j-1}\right) = 2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{-2j}}{(2j+1)!}$$

$\boxed{n = 2j+1}$

$\Longrightarrow$ $z=0$ es sing esencial y $\boxed{a_0 = 2}$

Note Tb puede hacerse con

$$\left.\begin{array}{l} z_n = \frac{1}{n} \longrightarrow f_3(z_n) = \dfrac{e^{n} - e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \\ \tilde{z}_n = \frac{1}{in} \longrightarrow f_3(\tilde{z}_n) = \dfrac{e^{in} - e^{-in}}{in} = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\, n}{n} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{z\to 0} f_3(z).$$



② $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{2z+2}{z^2+1}$

a) $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{2, \pm i\})$

$\longrightarrow$ f admite desarrollos de Laurent en los anillos

$A_1 = \{|z| < 1\}$, $A_2 = \{1 < |z| < 2\}$, $A_3 = \{|z| > 2\}$

b) Hallamos la serie de Laurent en $A_2 \supseteq \{|z| = \frac{3}{2}\}$.

• $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

$|z| < 2 \Leftrightarrow \boxed{\left|\frac{z}{2}\right| < 1}$

$\boxed{\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1}$ $\Leftrightarrow |z| > 1$

• $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}}_{\text{parte holomorfa}} + \underbrace{(2z+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}}_{\text{parte principal}}$$

$$\underbrace{(2z+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}}_{} = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}} + 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}$$

$\boxed{a_0 = -1/2}$ $\boxed{a_{-1} = 2}$ $\boxed{a_{-4} = -2}$