Variable Compleja, 3º Matemáticas
Examen junio 2024

Nombre y DNI: ....

1. Sean D_1, D_2, D_3 tres discos abiertos en $\mathbb{C}$ con $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$. Dadas tres funciones $f_j \in \mathcal{H}(D_j)$, $j = 1, 2, 3$, con las propiedades

$$f_1 = f_2 \quad \text{en } D_1 \cap D_2, \quad \text{y} \quad f_1 = f_3 \quad \text{en } D_1 \cap D_3.$$

   a) Demuestra que $f_2 = f_3$ en $D_2 \cap D_3$.

   b) Si para cada $j = 1, 2, 3$ se tiene $f_j \neq 0$ en D_j, demuestra que existen $g_j \in \mathcal{H}(D_j)$ tal que $e^{g_j} = f_j$ en D_j. ¿Qué relación hay entre g_1 y g_2 en $D_1 \cap D_2$?

   c) En las condiciones de b), demuestra que existe una función común $g \in \mathcal{H}(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ tal que $e^g = f_j$ en D_j.

   Nota: 2 ptos

2. Dado un parámetro $m \in \mathbb{R}$ fijo, considera las funciones

$$f(z) = \frac{\sinh(1/z)}{z^m} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{z\, f(z)}{\sinh z}.$$

   a) Calcula la serie de Laurent de f centrada en $z = 0$, y expresa el coeficiente a_{-1} en términos del parámetro m.

   b) Determina para qué valores de m es no nula la integral $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$, y calcula su valor

   c) Clasifica las singularidades de la función $g(z)$.

   Nota: 2 ptos

3. Si $S(z) = \displaystyle\int_{2i}^{z} \sqrt{w + 1 - 2i}\; dw$

   a) determina (y dibuja) dónde es $S(z)$ una función holomorfa

   b) calcula justificadamente $\displaystyle\int_{|z|=3/2} \frac{S(z)}{(z+1)^3}\, dz.$

   Nota: 2 ptos

4. Utilizando el teorema de los residuos, demuestra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x(x^2+1)}\, dx \;=\; \pi(1 - e^{-\lambda}) \qquad \lambda > 0.$$

   Debes justificar adecuadamente el límite de las integrales involucradas.

   Nota: 2 ptos

5. Sea f holomorfa en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}$, con $f(\partial\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. **Verdadero/Falso** (justificar)

   a) $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$

   b) $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$

   c) $f(z) = 4z^2 - 2$ tiene 2 soluciones en $\mathbb{D}$

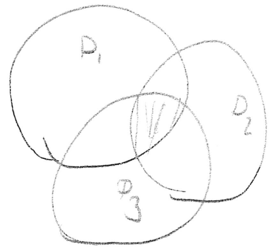
   d) $f(z) = 2z^2 - 4$ tiene 2 soluciones en $\mathbb{D}$

   Nota: 2 ptos

JUNIO 2024

0

1) a) En $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ tenemos



$$f_1 = f_2 = f_3$$

Ahora $f_2, f_3 \in \mathcal{H}(D_2 \cap D_3)$

y $f_2 = f_3$ en $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \Rightarrow ab^2$ en $D_2 \cap D_3$

$\Rightarrow$ tiene pto acum en $D_2 \cap D_3$

$\overset{PPA}{\Rightarrow}$ $\boxed{f_2 = f_3 \text{ en } D_2 \cap D_3}$

b) Por un tma del tema 6, como D_j es SC (disco)

si $f_j \neq 0$ en $D_j \Rightarrow \exists\, g_j \in \mathcal{H}(D_j) : f_j = e^{g_j}$

si $z \in D_1 \cap D_2 \Rightarrow f_1(z) = f_2(z) \Rightarrow e^{g_1(z)} = e^{g_2(z)}$

$$\Rightarrow e^{g_1(z) - g_2(z)} = 1$$

$$\Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{Z} : g_1(z) - g_2(z) = 2\pi i k_0$$

cte $\forall z \in D_1 \cap D_2$.

Si defino

$$g(z) := \begin{cases} g_1(z), & z \in D_1 \\ g_2(z) + 2\pi i k_0, & z \in D_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ en $D_1 \cap D_2$ las func coinciden, y $g \in \mathcal{H}(D_1 \cup D_2)$.

De forma similar $g_1(z) - g_3(z) = 2\pi i k_1$, $\forall z \in D_1 \cap D_3$

cte

Si defino

$$g(z) := \begin{cases} g_1(z), & z \in D_1 \\ g_2(z) + 2\pi i k_0, & z \in D_2 \\ g_3(z) + 2\pi i k_1, & z \in D_3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ en $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ tenemos

$$g_1(z) = g_2(z) + 2\pi i k_0 = g_3(z) + 2\pi i h_1$$

$$\Rightarrow \quad g_2(z) + 2\pi i k_0 = g_3(z) + 2\pi i h_1 \quad \text{en } D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

$\overset{PPA}{\Longrightarrow}$ coinciden tb en $D_2 \cap D_3$

Por tanto, la función $g(z)$ está bien def en $D_1 \cup D_2 \cup D_3$, es holomorfa y

$$e^g = f_j \quad \text{en } D_j$$

2) $m \in \mathbb{Z}$ fijo , $f(z) = \dfrac{\sinh(1/z)}{z^m} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$

a) Notar que

$$\sinh(w) = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2} = \frac{e^{i\frac{w}{i}} - e^{-i\frac{w}{i}}}{2i}\, i = i \operatorname{sen}\left(\frac{w}{i}\right) = -i \operatorname{sen}(iw)$$

$$= -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (iw)^{2n+1} = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^n} \cdot \cancel{(-1)^n}\, i\, w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{conv } \forall w \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{z^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1+m}} \Bigg\}$$

con conv en $0 < |z| < \infty$.

El coeficiente a_{-1} ocurre cuando

$$2n+1+m = 1 \iff m = -2n$$

$$\Rightarrow \quad a_{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \in (2\mathbb{Z}+1) \cup (2\mathbb{N}) \\ \dfrac{1}{(1-m)!} & \text{si } m \in -2\mathbb{N}_0 = \{0, -2, -4, \dots\} \end{cases}$$

$\boxed{2n+1 = 1-m}$

b) Por el Tma de Residuos

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i\, a_{-1} = \frac{1}{(1-m)!} \neq 0$$

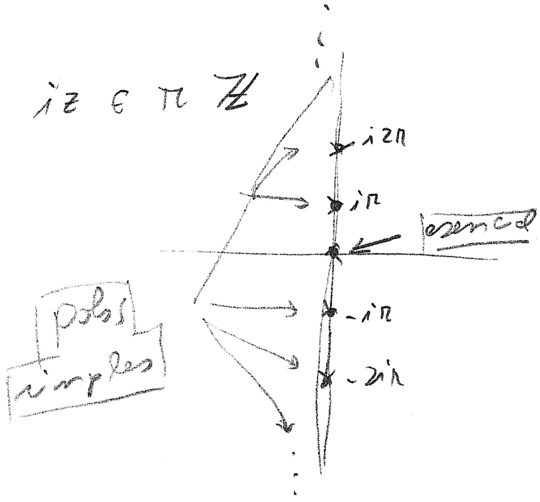
$$\iff m \in \{0, -2, -4, \dots\}$$

ⓒ $g(z) = \dfrac{z\, f(z)}{\sinh(z)}$

Notar que

$\sinh(z) = 0 \iff \sin(iz) = 0 \iff iz \in \pi\mathbb{Z}$

$\iff z \in i\pi\mathbb{Z}$



Si $z_n = i\pi n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\longrightarrow$ polo simple en z_n

Si $z_0 = 0 \longrightarrow$ sing esencial en z_0,

(pues la serie de Laurent de $f(z)$ tiene infinitos términos con exp negativo.

y $\lim_{z \to 0} \dfrac{z}{\operatorname{sh} z} = 1$)

[pues $\lim_{z \to z_n} \dfrac{(z - z_n)}{\operatorname{sh} z}\, z f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(z_n)} \cdot z_n f(z_n) \in \mathbb{C}$

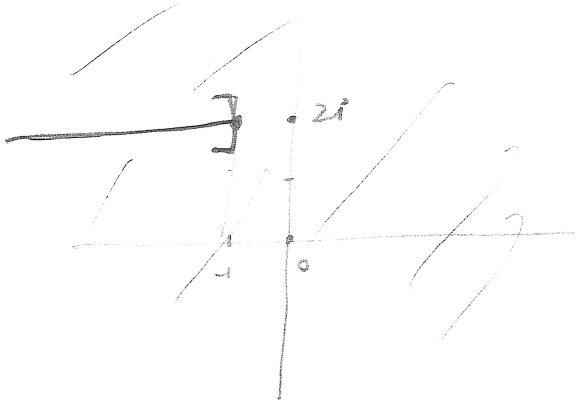
$\cos(iz_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$.]

(3) $S(z) = \int_{2i}^{z} \sqrt{w+1-2i}\, dw$

a) La raíz principal $\sqrt{w+1-2i}$ es holomorfa, salvo si

$$w+1-2i \in (-\infty, 0] \iff w \in 2i-1+(-\infty,0]$$

$$\iff w \in 2i+(-\infty,-1]$$



Como $\Omega = \mathbb{C} \setminus (2i+(-\infty,-1])$ es un dom^{o} estrellado (con centro en $z_0 = 2i$)

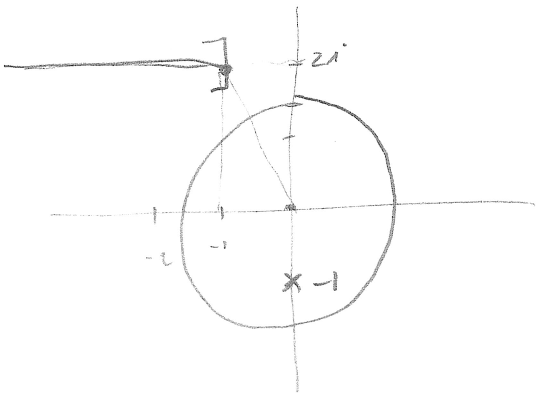
$\Downarrow$

existe un primitiva

$$S(z) = \int_{[2i, z]} \sqrt{w+1-2i}\, dw$$

que tb es holomorfa en Ω.

b) $$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{S(z)}{(z+1)^3}\, dz \overset{\text{Tma Cauchy}}{=} 2\pi i \frac{S''(-1)}{2!}$$



Para justificar el tma de Cauchy

- $S(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\Omega = \mathbb{C} \setminus (2i+(-\infty,-1])$

 y Ω es un entorno de $\overline{D_{3/2}(0)}$

 (pues $|2i-1-t| = \sqrt{4+(1+t)^2} > \sqrt{4} = 2$.)

- $-1 \in D_{3/2}(0)$.

Ahora, por Barrow

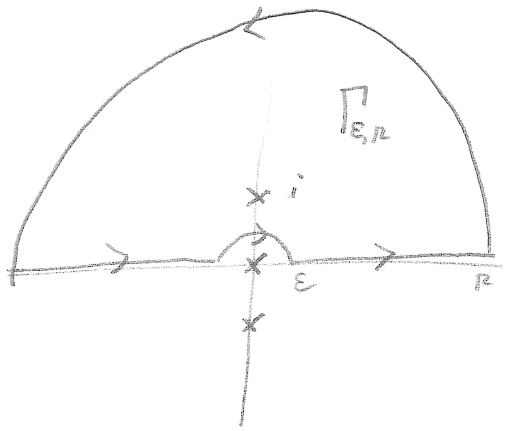
$$S'(z) = \sqrt{z+1-2i} \quad \text{y} \quad S''(z) = \frac{1}{2\sqrt{z+1-2i}}$$

$$\Rightarrow \quad S''(-1) = \frac{1}{2\sqrt{-2i}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad = \frac{1}{4}(1+i)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{S(z)}{(z+1)^3}\, dz = \pi i\, S''(-1) = \frac{\pi i}{4}(1+i) = \frac{\pi}{4}(-1+i) \quad //$$

4 $\quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x(x^2+1)}\,dx \quad , \quad \lambda > 0.$



Considero

$$f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z(z^2+1)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0, \pm i\})$$

polos simples

Considero el ciclo

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = [-R, -\varepsilon] \cup C_\varepsilon^- \cup [\varepsilon, R] \cup C_R^+ .$$

Por el Tma Residuos

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = -\pi i e^{-\lambda}.$$

Ahora $\quad \operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} \frac{\cancel{(z-i)}\, e^{i\lambda z}}{z(z+i)\cancel{(z-i)}} = \frac{e^{-\lambda}}{i2i} = -\frac{e^{-\lambda}}{2}$

Por otro lado

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f = \int_{-R}^{-\varepsilon} f - \int_{C_\varepsilon} f + \int_\varepsilon^R f + \int_{C_R} f =$$

Lema de clase

Ahora

- $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i \underline{\operatorname{Res}(f, 0)} = \pi i$

$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}\, e^{i\lambda z}}{\cancel{z}(z^2+1)} = 1}$

- $\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \int_{C_R} \frac{|e^{i\lambda z}|}{|z|\cdot|z^2+1|}|dz| \le \int_{C_R} \frac{e^{\operatorname{Re}(i\lambda z)}}{R\cdot(R^2-1)}|dz|$

$\boxed{|z^2+1| \ge |z|^2 - 1}$

$\boxed{\begin{array}{l} z = Re^{it} \\ |dz| = R\,dt \end{array}} \longrightarrow = \frac{1}{\cancel{R}\cdot(R^2-1)} \int_0^\pi e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, \cancel{R}\,dt \le \frac{\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

$\boxed{\operatorname{sen} t \ge 0}$

Por otro lado, tomando Im y usando

$\operatorname{Im}(e^{i\lambda t}) = \operatorname{sen}(\lambda t)$ tenemos

$$-\pi e^{-\lambda} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t(1+t^2)}\, dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t(1+t^2)}\, dt \right) - \pi + 0$$

par

Podemos usar el TCD en las integrales pues

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t(1+t^2)} \right| \cdot \mathbb{1}_{(\varepsilon, R)}(t) \leq \frac{\lambda}{1+t^2} \in L^1(0,\infty)$$

$|\operatorname{sen} x| \leq |x|$

$$\Rightarrow \quad -\pi e^{-\lambda} = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t(1+t^2)}\, dt - \pi$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t(1+t^2)}\, dt = \pi - \pi e^{-\lambda} = \pi(1 - e^{-\lambda})$$

5 Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$: $f(\partial\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$

$\Rightarrow$ $|f(z)| \leq 1, \quad \forall\, |z| = 1.$ (*)

$\boxed{a}$ $\boxed{V/F}$: $f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$

Por el PMM, como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$,

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}} |f| = \max_{\partial\mathbb{D}} |f| \overset{(*)}{\leq} 1$$

Entonces $\left.\begin{array}{l}|f(z)| \leq 1 \\ \forall z \in \overline{\mathbb{D}}\end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. V

$\boxed{b}$ $\boxed{\cancel{V}/F}$ $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

F pues f puede ser cte, eg, $f(z) \equiv 1$ (que cumple *)

[NOTA Si f es no cte sería cierto, por el Tma aplic Ab.:
$f(\mathbb{D})$ ab. $\Rightarrow$ $f(\mathbb{D}) = \overset{\circ}{f(\mathbb{D})} \overset{\boxed{a}}{\subseteq} (\overset{\circ}{\overline{\mathbb{D}}}) = \mathbb{D}$.]

$\boxed{c}$ $\boxed{V/F}$ $f(z) = 4z^2 - 2$ tiene 2 soluciones en $\mathbb{D}$.

$\Rightarrow$ busco raíces de $h(z) = f(z) - 4z^2 + 2$ en $\mathbb{D}$.

Si $|z| = 1 \Rightarrow |h(z) - (-4z^2)| = |f(z) + 2| \leq |f(z)| + 2 \leq 3$
$< |4z^2| = 4$

$\xrightarrow{\text{Rouché}}$ $\# Z_h(\mathbb{D}) = \# Z_{-4z^2}(\mathbb{D}) = 2$ V

$\boxed{d}$ $\boxed{V/F}$ $f(z) = 2z^2 - 4$ tiene 2 raíces en $\mathbb{D}$

Llamo $h(z) = f(z) - 2z^2 + 4$.

Si $|z|=1$, entonces

$$|h(z) - 4| = |f(z) - 2z^2| \leq |f(z)| + 2|z|^2 \leq 3 < 4$$

Rouché

$$\Rightarrow \# Z_h(\mathbb{D}) = \# Z_4(\mathbb{D}) = 0$$

$\longrightarrow$ no tiene raíces en $\mathbb{D}$ F