Funciones de Varias Variables 3

Hoja 1: Teorema de la función inversa

1. Sea $F(x,y) = \big(x^3+y^3, x^3-y^3\big)$. Demuestra que

   a) F es biyectiva de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

   b) $|DF(x,y)|$ se anula en algunos puntos (que debes determinar)

   c) F^{-1} no es diferenciable en algunos puntos (que debes determinar).

2. Para $n>1$ demuestra que, en general, si $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$|DF(x)| \neq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad \not\Longrightarrow \qquad F \text{ inyectiva.}$$

   Sugerencia: considera $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$, y una modificación adecuada para $n \geq 3$.

3. Sea $F(x,y) = \big(\frac{x^2-1}{4} + \frac{\cos y}{3}, \frac{xy}{2}\big)$. Demuestra que F es contractiva en $B = \overline{B_1(0)}$, probando para ello

   a) $F(B) \subset B$

   b) existe $\lambda < 1$ tal que $\|DF(x,y)\| \leq \lambda$, $\forall\,(x,y) \in B$.

   Encuentra el valor de $(x,y) \in B$ tal que $F(x,y) = (x,y)$.

   Sugerencia: En b), mayora la norma $\|DF\| \leq \|DF\|_2$.

4. Demuestra que $F(x,y,z) = \big(e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y\big)$ es inyectiva en $\mathbb{R}^3$, y concluye que F^{-1} es de clase C^∞ en su dominio $V = F(\mathbb{R}^3)$.

   Sugerencia: usar el TFI global (no es necesario calcular V).

5. Para los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales

$$\text{a)} \quad \begin{cases} u = x + y^5 \\ v = x^5 + y \end{cases} \qquad\qquad \text{b)} \quad \begin{cases} u = x - y^2 \\ v = x^2 + y + \frac{y^3}{3} \end{cases}$$

   demuestra que existen $r_1, r_2 > 0$ tales que admiten solución para todo $(u,v) \in B_{r_2}(0,0)$, y que éstas son únicas si pedimos que (x,y) esté en $B_{r_1}(0,0)$. ¿Sabrías cuantificar los valores de r_1 y r_2?

   Sugerencia: Para cuantificar los r, debes mayorar $N(r) = \sup\limits_{\bar{B}_r} \big\|DF(x,y) - DF(0,0)\big\|$.

6. Considera una función $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

   Da condiciones adecuadas en F para que, en un entorno de (x_0,y_0), se pueda despejar $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$. Demuestra que en ese caso se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}},$$

   donde usamos la notación $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det(DF)$.

7. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^3+y, y^5+y^2-x^3+1)$. Probar que f es biyectiva, determinar el conjunto de puntos $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ donde su inversa $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ es de clase C^∞ y averiguar $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(0,0)$.

8. Considera un polinomio genérico de grado 3 (con coeficientes reales)

$$P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \prod_{j=1}^{3}(x - z_j).$$

a) Demuestra que los coeficientes y las raíces están relacionados por las fórmulas

$$\begin{cases} a_0 = -z_1z_2z_3 \\ a_1 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 \\ a_2 = -z_1 - z_2 - z_3 \end{cases}$$

b) Utiliza lo anterior y el TFI para probar que si las raíces z_j son reales y simples, entonces se pueden expresar localmente en términos de los a_j mediante funciones de clase C^∞.

Sugerencia: demuestra que $\frac{\partial(a_0,a_1,a_2)}{\partial(z_1,z_2,z_3)} = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$.

9. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y coerciva con constante de coercividad $\lambda > 0$, es decir, $\|f(x') - f(x)\| \geq \lambda\|x' - x\|$ para todo par $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Probar que f un difeomorfismo de clase C^1, es decir, f es biyectiva y f^{-1} es también de clase C^1. Deducir que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\|dg(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(x) = x + g(x)$ es un difeomorfismo de clase C^1.

10. En la demostración que hemos visto en clase del teorema de la función inversa (donde denotamos por a el punto con diferencial invertible al que alude el enunciado del teorema), el entorno $U = B(a, r)$ de a donde $f|_U$ es inyectiva se ha fijado de acuerdo con dos condiciones:

a) $\det(df(x)) \neq 0$ para todo $x \in U$;

b) $\|df(x) - df(a)\| \leq \frac{1}{2\|df(a)^{-1}\|}$ para todo $x \in U$.

Probar que si $S, T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, T es invertible y $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, entonces S también es invertible. En consecuencia, la condición a) es redundante.

Sugerencia: notar que si P es un punto fijo de la aplicación $F : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $F(A) = T^{-1} + T^{-1}(T - S)A$, entonces $P = S^{-1}$.

Opcionales

11. La prueba del Teorema de la Función Inversa se simplifica bastante notacionalmente si suponemos que

$$x_0 = F(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad DF(x_0) = I. \tag{$*$}$$

Suponiendo que el teorema se ha probado en este caso particular, el objetivo del ejercicio es deducir el teorema en el caso general es decir, para $H \in C^1(\Omega)$ con

$$x_0 \in \Omega, \quad y_0 = H(x_0) \quad \text{y} \quad A = DH(x_0) \quad \text{invertible.}$$

a) Define $\varphi(x) = x + x_0$ y $\psi(y) = y - y_0$, y demuestra que

$$F = A^{-1} \circ \psi \circ H \circ \varphi$$

cumple las hipótesis en $(*)$

b) Encuentra una fórmula para H en términos de F

c) Aplicando el TFI a F, existe un abierto $U_0 \ni 0$ tal que $F : U_0 \to F(U_0)$ es un homeomorfismo. Encuentra abiertos adecuados con $U \ni x_0$ y $V \ni y_0$ de modo que

$$H : U \to V \quad \text{es homeomorfismo.}$$

d) Sabiendo, por el TFI, que $G_0 = \big(F|_{U_0}\big)^{-1}$ es de clase C^1 en $F(U_0)$, demuestra que

$$G := \big(H|_U\big)^{-1} \in C^1(V),$$

y encuentra una fórmula para G en términos de G_0

e) Demuestra que

$$DG(y) = \big[A \circ DF\big(G(y) - x_0\big)\big]^{-1}, \quad y \in V.$$