Funciones de Varias Variables 3

Hoja 2: Teorema de la función implícita

1. Para las siguientes ecuaciones, determina si es posible despejar $y = y(x)$ en un entorno del punto (x_0, y_0) indicado, y calcula en su caso $y'(x_0)$:

   (a) $x^2 + y + \operatorname{sen}(xy) = 0$ en $(0,0)$ $\qquad$ (b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ en $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

   (c) $(y+1)\big(y - 1 + x^2\big)^2 = 0$ en $(0,1)$ $\qquad$ (d) $x + y^2 + y\operatorname{sen}(xy) = 0$ en $(0,0)$

   (e) $x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$ en $(1,1)$ $\qquad$ (f) $\displaystyle\int_{x^2-1}^{xy} g(t)\,dt + x^2y = 0$ en $(1,0)$, si $g(0) = 3$.

2. En clase vimos que $x + y - \operatorname{sen}(xy) = 0$ admite una función implícita $y = y(x)$ en un entorno de $x = 0$. Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 de $y(x)$ centrado en el origen.

3. Justifica la existencia de una función $\varphi(x)$, de clase C^∞ entorno al origen, con la propiedad
$$1 - \varphi(x)e^x + xe^{\varphi(x)} = 0.$$
Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de $\varphi(x)$ centrado en el origen.

4. Demuestra que si una curva implícita $F(x,y) = 0$ admite una expresión local $y = \varphi(x)$ entorno a un punto, entonces su derivada segunda se puede calcular como
$$\varphi''(x) = -\frac{\Delta(x,y)}{F_y^3}, \quad \text{con} \quad \Delta(x,y) := F_y^2 F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy}.$$

5. Demuestra que en la ecuación
$$x^3z^2 - z^3yx = 0$$
se puede despejar z en función de x, y cerca de $(1,1,1)$, pero no cerca del origen. Calcula el valor de $\nabla z = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$ en $(1,1)$.

6. Sea $z = z(x,y)$ la función definida implícitamente por
$$yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0.$$
Demuestra que en el punto $(1,0)$ se tiene $z_x = -2/3$ y $z_y = 0$, y calcula z_{xy}.

7. a) Suponer que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ permite definir implícitamente $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$. Demuestra que
$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$
b) Más generalmente, si $F(x_1,\ldots,x_n) = 0$ y es posible definir implícitamente cada x_i en función de las otras variables $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, calcula el valor de
$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\,.$$

8. Determina si es posible resolver (u,v) en los siguientes sistemas, en un entorno del punto indicado
$$\text{a)} \quad \begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases} \quad \text{en (1,1,1,1,1)} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1 \end{cases} \quad \text{en (0,1,1,1,0).}$$
Calcula en su caso el valor de $(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})$ en el punto indicado.

9. Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la igualdad $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

10. Esbozar la gráfica de las siguientes curvas:

    a) $xye^{3-x-2y} = 1$; b) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$; c) $x^3 - y^3 - 3xy = -1$.

Opcionales

11. Sean $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en un cierto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $F(x_0, y_0) = b$, y supongamos que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Decimos que el par (I, f) es *factible (para (x_0, y_0) con respecto a F)* si se cumplen las siguientes condiciones:

    i) I es un intervalo abierto que contiene a x_0 y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1;
    ii) $f(x_0) = y_0$, $F(x, f(x)) = b$ y $F_y(x, f(x)) \neq 0$ para todo $x \in I$.

    Denotamos por $\mathcal{A}$ a la familia de pares factibles.

    a) Probar que existe un par factible maximal, es decir, un par factible (I^*, f^*) tal que, para cada $(I, f) \in \mathcal{A}$, se cumplen $I \subset I^*$ y $f(x) = f^*(x)$ para todo $x \in I$.
    b) Denotemos $I^* = (c^*, d^*)$, $-\infty \leq c^* < d^* \leq \infty$, y supongamos que $p^* \in \{c^*, d^*\}$, $\lim_{x\to p^*} f^*(x) = q^*$ y $(p^*, q^*) \in \Omega$. Probar que $F_y(p^*, q^*) = 0$.

    Sugerencia: notar que en a) ha de ocurrir $I^* = \bigcup_{(I,f)\in\mathcal{A}} I$.

12. Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ un polinomio de grado n y $z_0 \in \mathbb{R}$ una raíz real simple, es decir

$$P(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad P'(z_0) \neq 0.$$

    Utiliza el teorema de función implicita para enunciar un resultado que garantice que todo polinomio $b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$, con coeficientes cercanos a $(a_0, \ldots, a_n)$ tiene una raíz real y simple que depende de forma C^∞ de los coeficientes $(b_0, \ldots, b_n)$.

13. Se define la *curvatura* en un punto de una curva implícita $F(x, y) = 0$ como la cantidad

$$\kappa(x, y) := \frac{|\Delta(x, y)|}{|\nabla F|^3} \qquad \text{(cuando } F \in C^2 \text{ y } \nabla F \neq \mathbf{0}\text{).}$$

    donde $\Delta(x, y)$ es como en el ejercicio 4.

    a) Demuestra que si la curva admite localmente una expresión $y = \varphi(x)$ entonces

$$\kappa = \frac{|\varphi''|}{(1 + |\varphi'|^2)^{3/2}}.$$

    b) ¿Es válida la fórmula anterior si tenemos en su lugar la expresión local $x = \varphi(y)$?

    c) Calcula la curvatura en el caso de una circunferencia $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, y justifica por qué a la expresión $1/\kappa$ se le llama *radio de curvatura*.

14. En Termodinámica las variables P, V, T están relacionadas por una ecuación de estado $F(P,V,T) = 0$, de modo que cada variable se puede despejar implícitamente en función de las otras dos (en un dominio adecuado).

a) En el modelo de gases ideales se tiene (para una cte universal $R > 0$)

$$PV = RT.$$

Despejando explícitamente cada función, comprueba que se cumple $\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1$.

b) En el modelo de Dieterici se tiene

$$P \cdot e^{a/(RTV)} \cdot (V - b) \;=\; RT,$$

donde $a, b > 0$ son constantes fijas (y se supone $V > b$). Demuestra que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \Big(R + \frac{a}{TV}\Big) / \Big(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\Big).$$

c) En el modelo de van der Waals se tiene (también para $V > b$)

$$\Big(P + \frac{a}{V^2}\Big)(V - b) = RT.$$

Derivando implícitamente determina el *punto crítico isotermo* de este modelo, es decir el punto (P_c, V_c, T_c) en el cual

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0.$$

d*) Continuando con el modelo de van der Waals, demuestra lo siguiente sobre las *curvas isotermas* $P = P(V)$ cuando T es constante (y $V > b$):

i) Si $T > T_c$, las curvas $P = P(V)$ son decrecientes, es decir $\frac{\partial P}{\partial V} < 0$.

ii) Si $T < T_c$, las curvas $P = P(V)$ no siempre son decrecientes: tienen un mínimo local en un punto $V_0 < 3b$ y un máximo local en un punto $V_1 > 3b$

Nota: En c), derivando implícitamente, deberías llegar a $V_c = 3b$, $P_c = \frac{a}{27b^2}$, $T_c = \frac{8a}{27Rb}$. La idea del ejercicio es llegar de forma autocontenida a estas expresiones (y no sustituirlas en las fórmulas para ver que sale 0).