Hoja 3: Variedades regulares

1. Estudiar si las curvas del ejercicio 11 de la hoja 2 son, de hecho, curvas regulares.

2. Probar que cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es una variedad regular y hallar los correspondientes espacios tangente y normal en el punto $\mathbf{p}$ que se indica:

   a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^4}{c^4} = 3\}$ (con $a, b, c > 0$ constantes), $\mathbf{p} = (a, b, -c)$;
   b) $M = \{(t, e^t - t \log t, t^3 + \operatorname{sen} t) : t > 0\}$, $\mathbf{p} = (1, e, 1 + \operatorname{sen} 1)$;
   c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/\sqrt{y^2 - y - 2}\}$, $\mathbf{p} = (\frac{1}{2}, 3)$;
   d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$, $\mathbf{p} = (-1, 2, -3)$;
   e) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((x - 2)^2 + (y + 2)^2 - 1)(y^3 + 3x^2y - 2x^3 - 1) = 0\}$, $\mathbf{p} = (0, 1)$;
   f) $M = \{(u, 2v^2, u^2 + v) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$, $\mathbf{p} = (-1, 0, 1)$;
   g) $M = \{(\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen}(2t)) : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{p} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$;
   h) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}\}$, $\mathbf{p} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$;
   i) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2y)^3 + z^2 = z^3 + 1\}$, $\mathbf{p} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

3. Considérense los conjuntos
$$C = \{(t^3 - 3t - 2, t^2 - t - 2) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$S = \{(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$
¿Son C y S, respectivamente, una curva y una superficie regular? Si no es así, ¿qué punto habría que quitarles para que lo fueran?

   Sugerencia: en el caso de S, notar que puede describirse como la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, es decir, es un cono.

4. Probar que la esfera euclídea unidad
$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$$
es una hipersuperficie regular y hallar el hiperplano tangente y la recta normal en un punto cualquiera $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

5. Probar que
$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$
es una superficie regular homeomorfa al toro
$$T = \{((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u) : (u, v) \in [0, 2\pi]^2\},$$
donde $R > r > 0$ son constantes. Hallar los planos lineales tangente y normal a S en el punto $(0, 1, 1, 0)$.

6. Probar que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad regular y O es un abierto de $\mathbb{R}^n$ cuya intersección con O es no vacía, entonces $M \cap O$ es también una variedad regular.

7. Probar que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad regular compacta entonces no puede admitir una parametrización global; más aún, no puede existir un homeomorfismo $\varphi : U \to M$, siendo U un abierto de $\mathbb{R}^k$.

8. Probar si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad regular entonces existe una familia numerable de compactos $\{K_m\}_m$ tal que $M = \bigcup_m K_m$.

   Sugerencia: notar que la familia de bolas cerradas $\mathcal{B} = \{\overline{B_n(\mathbf{q}, r)} : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$ es numerable, por lo que basta demostrar que para cada $\mathbf{a} \in M$ existe $B \in \mathcal{B}$ conteniendo a $\mathbf{a}$ tal que $M \cap B$ es compacto. Para ello, comprobar que si $(U_\mathbf{a}, \varphi_\mathbf{a})$ es una parametrización local de M en $\mathbf{a}$, $\varphi_\mathbf{a}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{a}$ y $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño para que $\overline{B_k(\mathbf{u}_0, \varepsilon)} \subset U_\mathbf{a}$, entonces vale como B cualquiera de las bolas de $\mathcal{B}$ que contiene a $\mathbf{a}$ y cumple $M \cap B \subset \varphi_\mathbf{a}(\overline{B_k(\mathbf{u}_0, \varepsilon)})$.

Algunos ejercicios complementarios:

(Los siguientes ejercicios se propusieron en la asignatura de Funciones de Varias Variables I el cuatrimestre pasado).

9. Probar que si al conjunto de puntos que cumplen $x^2y^2 - x^3 - y^3 + xy = 0$ se les quita $(0,0)$ y $(1,1)$ se obtiene una curva regular en $\mathbb{R}^2$.
10. Hallar el plano tangente a la superficie regular $z = \log(\frac{x+y}{x-y})$ que es paralelo al plano $x + 3y + z = 10$.
11. De una superficie regular se sabe que contiene a las curvas $(\cos t, \operatorname{sen} t, t - \pi/2)$ y $(\log(1+t^2), 1+\operatorname{sen} t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar el plano tangente a la superficie en el punto $(0,1,0)$.
12. Considérese la superficie regular $xyz = a^3$ (con $a \neq 0$ una constante).
    a) Calcular el plano tangente a la superficie en un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0) y simplificar la expresión obtenida todo lo posible.
    b) Calcular los puntos en que dicho plano corta a cada uno de los ejes coordenados.
    c) Probar que el volumen del tetraedro determinado por los tres puntos del apartado b) y el origen no depende del punto (x_0, y_0, z_0) elegido.
13. Hallar la recta simultáneamente tangente a las superficies regulares $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.
14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una cierta función de clase C^1 y considérese la superficie regular $z = xf(y/x)$. Calcular los planos tangentes en cada uno de los puntos de la superficie (expresándolos tan simplificadamente como sea posible) y demostrar que existe un cierto punto del espacio que pertenece a todos ellos.
15. Hallar para qué valores del parámetro $c \in \mathbb{R}$ las esferas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z-c)^2 &= 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \end{aligned}$$

    cumplen, simultáneamente, las condiciones siguientes:

    a) su intersección es no vacía;
    b) en cada uno de los puntos de intersección, los planos tangentes a ambas esferas son perpendiculares.