Funciones de Varias Variables 3

Hoja 4a: Integración sobre curvas escalares

1. Determina la longitud de las siguientes curvas $\boldsymbol{\gamma}(t)$, definidas en el intervalo indicado, esbozando cuando sea posible la gráfica (puedes usar ordenador):

(a) $(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$	(b) $(R\cos t, R\sin t, ht)$, $t \in [0, 2\pi]$
(c) $(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$	(d) $(\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$, $t \in [0, \mathtt{T}]$
(e) $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \in [0, \infty)$	(f) $(t, t\sin t, t\cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

Nota: En (f) puedes usar $2\int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{asinh}(x)$.

2. Una partícula sigue la trayectoria

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{2}t^2\big), \quad \text{con } t \geq 0.$$

Cuando $t = 2\pi$, la partícula se escapa por la tangente y sigue desplazándose en línea recta con velocidad constante. Describe la trayectoria de la partícula para $t \in [2\pi, 4\pi]$. ¿Cuál será la posición y velocidad en $t = 4\pi$? Determina la distancia total recorrida por la partícula para $t \in [0, 4\pi]$.

3. Calcula el área de una cortina que cuelga de un aro circular $x^2 + y^2 = 1$ situado a altura $z = 2$, y cuyo borde inferior viene dado por la función $f(x, y) = 2 - 8x^2y^2$.

4. Considera la curva *cardioide*

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \Big(\frac{\cos t}{2} + \cos(t/2), \frac{\operatorname{sen} t}{2} + \operatorname{sen}(t/2)\Big), \quad t \in [-2\pi, 2\pi].$$

a) Demuestra que $|\boldsymbol{\gamma}'(t)| = |\cos(t/4)|$.

b) Calcula $\operatorname{Long}(\boldsymbol{\gamma})$.

c) Calcula el centro de masas de $\boldsymbol{\gamma}$, suponiendo que la densidad ρ es constante.

Nota: en c) puede ser útil usar $2\cos A\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$.

5. Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cilindro $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$, restringida a $z \geq 0$.

a) Determina un camino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\gamma([a, b]) = C$.

b) Calcula la longitud de C (en términos de la integral $E(\kappa)$ del ejercicio 10).

6. Sean $A > 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $a = \frac{A}{\sqrt{1+b^2}}$. Hallar el valor promedio de la función $f(x, y) = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$ a lo largo del camino $\gamma(t) = (t, bt)$, con $t \in [-a, a]$.

7. Hallar la masa de la hélice circular $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $-\infty < t < \infty$, sabiendo que su densidad de masa viene descrita por la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

8. Hallar el centro de masas de un alambre cuya forma es la de la función $y = \log x$ entre $x = 1$ y $x = e$, tal que la densidad en cada punto del alambre es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

Nota: Puedes usar ordenador para calcular las primitivas.

9. Demostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, es:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f\big(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta\big)\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta.$$

Opcionales

10. Considera la curva

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(t, t^2 \operatorname{sen}(\pi/t^2)\big), \quad \text{para } t \in [0,1] \qquad (\text{con } \boldsymbol{\gamma}(0) = (0,0)).$$

Demuestra que

a) $\boldsymbol{\gamma}$ es derivable en todo $t \in [0,1]$

b) $\boldsymbol{\gamma}$ no es una curva rectificable, es decir $\mathrm{Long}(\boldsymbol{\gamma}) = \infty$.

11. Considera la elipse

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(a\cos t, b \operatorname{sen} t\big), \qquad t \in [0, 2\pi] \quad (\text{con } b > a > 0).$$

a) La longitud de la elipse no se puede expresar en términos elementales. Demuestra sin embargo que puede escribirse como $\mathrm{Long}(\boldsymbol{\gamma}) = 4b\, E(\kappa)$, en términos de la integral

$$E(\kappa) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t}\, dt,$$

para un valor de $\kappa = \kappa(a,b) > 0$ adecuado.

b*) Trata de demostrar la fórmula

$$E(\kappa) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{\kappa^2}{2n-1}\right).$$

Para ello puedes usar algunos recursos de análisis

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac12}{n} x^n, \quad \binom{\frac12}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t)^{2n}\, dt \;=\; 2\pi\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

(que debes tratar de justificar).

c) **V/F:** ¿Puede ocurrir que el arco de elipse dependa linealmente del parámetro t, es decir

$$\mathrm{Long}\big(\boldsymbol{\gamma}_{|[0,\theta]}\big) \;=\; A(a,b)\,\theta, \quad \theta \in [0,2\pi], \quad \text{para algún } A(a,b) > 0?$$

Algunas soluciones:

Ejer 1. (a) 6 (b) $2\pi\sqrt{R^2+h^2}$ (c) 8 (d) $\sqrt{2}\,\sinh \mathtt{T}$ (e) $\sqrt{2}$ (f) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+2}+\text{asinh}\,(\frac{\pi}{\sqrt{2}})=6,95...$

Ejer 2. Dist $=3\pi\sqrt{36\pi^2+1}+\frac{1}{6}\text{asinh}\,(6\pi)=178'501...$

Ejer 3. A $=2\pi$. Ejer 4: Long=8, $M_x=3/10$, $M_y=0$

Ejer 5. Long=$2\sqrt{2}\,E(\frac{\sqrt{2}}{2})=3'82...$ Ejer 6: $\frac{\pi}{4}A$. Ejer 7: $\pi\sqrt{2}$. Ejer 8: $M_x=2'081$, $M_y=0'701$