Funciones de Varias Variables 3

Hoja 4c: Teorema de Green

1. Utiliza el teorema de Green para calcular las siguientes integrales de línea

$$a)\ \oint_{\partial D} -y^3\,dx + x^3\,dy \qquad b)\ \oint_{\partial Q} \cos\tfrac{\pi y}{2}\,dx + x\sin\tfrac{\pi y}{2}\,dy \qquad c)\ \oint_{\partial T} x^2\,dy$$

$$d)\ \oint_{\partial Q} \big(e^y + x, x^2 - y\big)\cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \qquad e)\ \oint_{\partial\Omega} \big(xy^2, x+y\big)\cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \qquad f)\ \oint_{\partial\mathcal{T}} \big(y^2, x^2\big)\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

donde D es el disco unidad, $Q = [0,1]\times[0,1]$, T el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1)$, $\mathcal{T}$ el triángulo de vértices $(0,0),(2,0),(2,3)$, y Ω la región entre $y = x$ e $y = x^2$ (las orientaciones se suponen antihorarias).

2. Considera las siguientes curvas parametrizadas

$$\gamma_1(t) = \big(\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t)\big),\ t\in[0,\tfrac{\pi}{2}] \qquad \gamma_2(t) = (t - t^2, t - t^3),\ t\in[0,1]$$

a) Demuestra que son curvas cerradas, simples y esboza sus gráficas (puedes usar ordenador).

b) Determina el área de la región que encierran.

3. Calcula el área limitada entre el eje X y un arco de cicloide $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.

4. Usando el teorema de Green, calcular la diferencia entre las cantidades

$$I_1 = \int_{C_1} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy, \qquad I_2 = \int_{C_2} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy,$$

donde C_1 es el segmento que une $(0,0)$ con $(1,1)$ y C_2 es el arco de la parábola $y = x^2$ que conecta estos puntos en el mismo sentido.

5. Sea $r = r(\theta)$, para $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$, una curva cerrada simple en coordenadas polares. Demuestra que el área A del dominio que encierra cumple

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r(\theta)^2\,d\theta.$$

Aplica el resultado para calcular las áreas encerradas por un "pétalo" de

$a)\ r^2 = \cos(2\theta)$ (lemniscata) $\qquad b)\ r = \sin(N\theta)$

Nota: debes encontrar, en cada caso, el rango de integración en θ.

6. El teorema de Green puede también escribirse como

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{n}} \;=\; \iint_{\Omega} \operatorname{div}\,\overrightarrow{\mathbf{E}}\,,$$

donde $\vec{\mathbf{n}}$ es el vector normal exterior, y la primera integral representa el flujo neto saliente del campo $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ a través de $\partial\Omega$. Esboza los siguientes campos y utiliza la fórmula anterior para calcular los flujos correspondientes

(a) $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \big(x, y^3\big)$ a través del cuadrado de vértices $(\pm1,\pm1)$

(b) $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \big(xy^2, x^2y\big)$ a través de la circunferencia de centro 0 y radio R

(c) $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \big(x, 2x\big)$ a través de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

7. Utiliza la versión del teorema de Green del ejercicio 6 para probar las siguientes fórmulas

$$a)\ \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \boldsymbol{\vec{n}} = \iint_{\Omega} \Delta f \qquad b)\ \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} f \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\vec{n}} - \iint_{\Omega} f \ \mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathbf{F}}$$

$$c)\ \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g = \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \boldsymbol{\vec{n}} - \iint_{\Omega} f\, \Delta g \qquad d)\ \int_{\partial\Omega} \Big(f\nabla g - g \nabla f \Big) \cdot \boldsymbol{\vec{n}} = \iint_{\Omega} \Big(f \Delta g - g \Delta f \Big)$$

Sugerencia: Aplicar el ejercicio 6 a campos $\boldsymbol{\vec{E}}$ de la forma ∇f, $f\overrightarrow{\mathbf{F}}$, $f\nabla g$, etc...

8. a) Probar que si T es el segmento que conecta los puntos (a, c) y (b, d), entonces

$$\int_T xdy - ydx = ad - bc.$$

b) Deducir, usando el teorema de Green, que si P es la poligonal cerrada que resulta de conectar n puntos en el plano, (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots n$, (con $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$, y orientada en sentido contrario a las agujas del reloj), y los segmentos de la poligonal no se intersecan entre sí, entonces el área de la región D encerrada por P viene dada por

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2}(X_{\text{ini}} \cdot Y_{\text{fin}} - X_{\text{fin}} \cdot Y_{\text{ini}}),$$

donde $X_{\text{ini}} = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $X_{\text{fin}} = (x_1, \dots, x_n)$, $Y_{\text{ini}} = (y_0, \dots, y_{n-1})$, $Y_{\text{fin}} = (y_1, \dots, y_n)$.

c) Como aplicación, hallar una fórmula del área limitada por el polígono regular de n lados y vértices $\big(r\cos(2\pi k/n), r\,\mathrm{sen}(2\pi k/n)\big)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, y comprobar que converge al área del círculo de radio r cuando $n \to \infty$.

9. **V/F:** justifica las respuestas

a) $\oint_{\boldsymbol{\gamma}} xy^2\, dx + (x^2 y + 2x)\, dy$ sólo depende del área de la región encerrada por $\boldsymbol{\gamma}$

b) Por Green, $\oint_{\partial D^+} \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy = \iint_D \left[\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)_x - \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right)_y \right] dx\, dy = 0$

c) El área encerrada por la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \cos t \,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (lemniscata de Gerono) viene dada por la integral

$$A = \frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{\gamma}} (-ydx + xdy).$$

Algunas soluciones:

Ejer 1: (a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $1+\frac{2}{\pi}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $2-e$ (e) $\frac{1}{12}$ (f) 2. Ejer 2: (i) $\frac{\pi}{8}$ (ii) $\frac{1}{60}$. Ejer 3: $3\pi R^2$

Ejer 4: $\frac{1}{3}$. Ejer 5: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4N}$. Ejer 6: (a) 8 (b) $\frac{\pi R^4}{2}$ (c) 6π.