

Hoja 5a: Integrales de Superficie

1. Determina las áreas de las siguientes superficies:

- porción de la esfera unidad contenida en el cono $z > \sqrt{x^2 + y^2}$
- superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 < 1$
- gráfica de la función $\varphi(x, y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ sobre el dominio $(0, 1) \times (0, 1)$
- porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ contenida en el paraboloide $x^2 + y^2 < 3z$.
- superficie parametrizada por $T(u, v) = (u - v, u + v, uv)$, con (u, v) en el disco unidad D
- superficie parametrizada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = 2r \cos \theta, \quad z = \theta, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Nota: Cuando sea posible, debes tratar de esbozar la gráfica de cada superficie (puedes usar ordenador).

2. Sea S la superficie de revolución generada por la gráfica de $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ alrededor del eje Y .

- Encuentra una parametrización $T(s, t)$ para S , y determina el vector $T_s \times T_t$
- Demuestra que el área de S puede expresarse como $A(S) = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$
- Encuentra el área del toro, aplicando lo anterior a $y = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$, donde $R > r > 0$.

3. Calcula las siguientes integrales de superficie de funciones escalares

- $\iint_S \frac{z dS}{A(S)}$, donde S es la superficie del cono $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ con $0 < z < h$
- $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ donde S es el trozo del plano $z = x + 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
- $\iint_S z^2 dS$ donde S es la frontera del cubo $[-1, 1]^3$.

4. a) Dados tres puntos $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$, demuestra que la superficie S parametrizada por

$$T(s, t) = (1 - s - t)P_0 + sP_1 + tP_2, \quad (s, t) \in (0, 1)^2 : s + t < 1.$$

corresponde con el interior del triángulo con vértices en P_j , $j = 0, 1, 2$.

b) Si S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$, calcula $T_s \times T_t$ y demuestra

$$\iint_S yz dS = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{y} \quad \iint_S (x, y, z) \cdot d\vec{S} = 1.$$

5. Calcula el centro de masas de la semiesfera superior de radio R (si la densidad ρ es constante).

6. Si S_R es la esfera de radio R centrada en el origen, definimos la función

$$I(P) := \iint_{S_R} \frac{dS}{|\mathbf{x} - P|}, \quad \text{si } P \in \mathbb{R}^3 : |P| \neq R.$$

Demuestra que

$$I(P) = 4\pi R \quad \text{si } |P| < R, \quad \text{y} \quad I(P) = 4\pi R^2/|P| \quad \text{si } |P| > R.$$

Sugerencia: aplicando una rotación podemos suponer que $P = (0, 0, \lambda)$ con $\lambda = |P|$.

7. Calcula las siguientes integrales de superficie de campos vectoriales (con la orientación exterior)
- $\iint_{S^2} (1, y, z^3) \cdot d\vec{S}$ donde S^2 es la esfera unidad
 - $\iint_S (1, y, e^{x+y+z}) \cdot d\vec{S}$ donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $0 < z < 1$
 - $\iint_S (x^2, y^2, z^2) \cdot d\vec{S}$, donde S es la porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con $1 < z < 2$.
8. Un fluido sube por una tubería vertical de radio 1 con velocidad $\vec{v} = (1 - x^2 - y^2)\vec{k}$.
- Esbozar el campo $\vec{v}$. ¿Por dónde circula más rápido el fluido?
 - Se coloca un filtro poroso en la tubería en forma de semiesfera superior. Determina el flujo neto de fluido a través del filtro.
9. Calcular la integral de superficie
- $$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$
- para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ y la superficie S del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotado por los planos $z = -1$ y $z = 1$ e incluyendo las tapas $x^2 + y^2 \leq 1$ cuando $z = -1, 1$.
10. Tenemos un invernadero en forma de semicilindro $y^2 + z^2 = 1$, con $z > 0$ y $0 < x < 2$. El calor entra a través de la superficie según el campo $\vec{\Phi} = -\nabla T$, donde $T(x, y, z) = 40(y^2 + z^2)$ es la temperatura en el borde. Determina el flujo neto de calor que entra en el invernadero.
11. Sea S la parte del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con $z > 0$.
- Utilizando coordenadas esféricas, encuentra una parametrización para S y calcula el vector normal exterior asociado
 - Calcula el flujo saliente $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, cuando $\vec{F} = (x^3, 0, 0)$.
12. * Se diseña un restaurante en la ladera de una montaña con la forma de la figura
- La pared vertical cilíndrica del restaurante, que da al exterior, será hecha de vidrio. Calcula su área.
 - El volumen interior debe ser superior a $2\pi R^3$. Determina para qué valores de R ocurre esto.
 - En verano, la temperatura exterior (incluyendo techo y contacto con la montaña) viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$. Sabiendo que el calor entra a través de la frontera según el campo $\vec{\Phi} = -\kappa \nabla T$, para cierto $\kappa > 0$ ¿cuál será el flujo total de calor hacia el interior del restaurante?

Nota: extraído de Marsden-Tromba, Ejercicio 8 en §7.6. En c) es más sencillo usar el teorema de la divergencia.

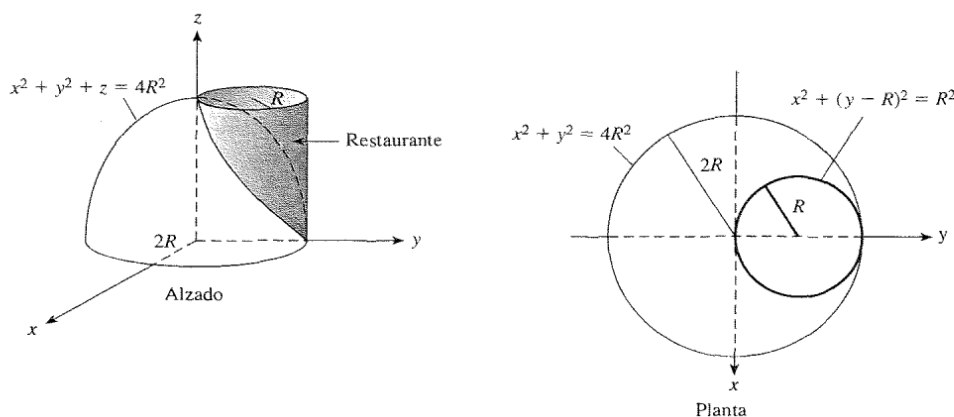


Figura 0.1: Figura del ejercicio 12.

Algunas soluciones:

Ejer 1: (a) $\pi(2 - \sqrt{2})$ (b) $\sqrt{3/2}\pi$ (c) $\frac{4}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)$ (d) 12π (e) $\frac{\pi}{3}(6\sqrt{6} - 8)$ (f) $4\sqrt{5}$.

Ejer 3: (a) $2h/3$ (b) $7\pi\sqrt{2}/4$ (c) $40/3$. Ejer: 5 $(0, 0, R/2)$

Ejer 7: (a) $\frac{32\pi}{15}$ (b) π (c) $-\frac{15\pi}{2}$. Ejer 8: $\pi/2$ Ejer 9: π . Ejer 10: 160π . Ejer 11: $a^3bc2\pi/5$.

Ejer 12: (a) $4\pi R^3$ (b) $R > 4/3$ (c) $60\pi\kappa R^4$.