

Hoja 5b: Teoremas de Stokes y de la divergencia

1. Calcula las integrales $\iint_S \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ en los siguientes casos

- a) $\vec{\mathbf{F}} = (z^3, -y^3, xyz)$, con $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$
 b) $\vec{\mathbf{F}} = (\sin(xy), e^x, -yz)$, con $S = \{x^2 + y^2 + 4z^2 = 9\}$
 c) $\vec{\mathbf{F}} = (y, z, x^2y^2)$, con $S = \{z = x^2 + y^2, z \leq 4\}$
 d) $\vec{\mathbf{F}} = (2y, -6z, 3e^{xy^2z^3})$, con $S = \{x^2 + y^2 + z = 4, 0 \leq z \leq 3\}$

Nota: Debes dibujar la superficie S , escogiendo una orientación, y si usas Stokes, esbozar cómo se orienta ∂S .

2. Calcula las integrales de línea $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ en los siguientes casos

- a) $\vec{\mathbf{F}} = (xy, yz, xz)$, con $C = \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{z = y + 2\}$
 b) $\vec{\mathbf{F}} = (\sin x, \cos y, xz)$, con $C = \{(\cos t, \sin t, \cos t \sin t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset \{z = xy\}$
 c) $\vec{\mathbf{F}} = (x^2 - y, x + y^2, 1)$, con $C = \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{z = y^2\}$
 d) $\vec{\mathbf{F}} = (-y, x, 0)$, con $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 : x, y, z \geq 0\} \cap \{x^2 + y^2 = 2Ry\}$

Nota: Debes esbozar la curva C , escogiendo una orientación, y si usas Stokes, definir la superficie S que encierra con la orientación adecuada.

3. Sea $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$, $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo y S una superficie con las hipótesis del teorema de Stokes.

- a) Demuestra que $\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}) = 2\vec{\mathbf{v}}$, y deduce que (con orientaciones adecuadas)

$$\int_{\partial S} (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 2 \iint_S \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

- b) Si $|\vec{\mathbf{v}}| = 1$ y S está contenida en el plano $\Pi = \{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = a\}$ demuestra que

$$A(S) = \frac{1}{2} \left| \int_{\partial S} (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \right|$$

- c) Si $S = \{z = \varphi(x, y) : (x, y) \in R\}$, tomando $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{k}}$ demuestra que

$$\int_{\partial S} -ydx + xdy = 2A(R).$$

Compara esta fórmula con el ejercicio 2.d.

4. Si $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$, considera los hemisferios $S^\pm = \{|\vec{\mathbf{r}}| = R : \pm z \geq 0\}$ de la esfera de radio $R > 0$, con la orientación exterior usual $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}/|\vec{\mathbf{r}}|$, y el campo

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^\alpha}, \quad \text{con } \alpha > 0.$$

- a) Demuestra con un cálculo directo que $\iint_{S^\pm} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = 2\pi R^{\alpha-3}$.

- b) Usando el teorema de Stokes, demuestra que no puede existir ningún $\vec{\mathbf{G}} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ tal que

$$\vec{\mathbf{F}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{G}}.$$

5. Utiliza el teorema de la divergencia para calcular $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ en los siguientes casos
- $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$, con $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$
 - $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$, con $\Omega = (0, 1)^3$
 - $\vec{F} = (x - y, y - z, z - x)$, con $\Omega = \{x^2 + y^2 < z < 1\}$
 - $\vec{F} = (y, z, xz)$, con $\Omega = \{x^2 + y^2 < z^2 < 1, x < 0, z > 0\}$
 - $\vec{F} = (e^y, e^x, (x^2 + y^2)^2 z)$, con $\Omega = \{x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < h\}$
- Nota:* Debes dibujar el dominio Ω , especificando si es regular o regular a trozos, e indicar el vector $\vec{n}$.
6. Si S es un elipsoide en $\mathbb{R}^3$, utiliza el teorema de la divergencia para probar que $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$, para todo $\vec{F}$ de clase C^2 . Compara el procedimiento con el ejercicio 1.b. ¿Para que otras superficies S es cierta esta afirmación?
7. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$ y Ω un dominio regular.
- Demuestra que $\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2}$
 - Demuestra que, si $0 \notin \overline{\Omega}$, entonces $\iiint_{\Omega} \frac{dV}{r^2} = \iint_{\partial\Omega} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2}$
 - V/F:** si $0 \in \Omega$ entonces se cumple también (b)
- Sugerencia:* en c) no puedes aplicar el teorema de la divergencia en Ω (¿por qué?). Trata sin embargo de aplicarlo en $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(0)$, y después toma límites para $\varepsilon \searrow 0$ (usando convergencia dominada en la primera integral, y un cálculo explícito en la segunda).
8. Algunos ejercicios de la Hoja 5a se pueden hacer más rápidamente usando el teorema de la divergencia. Comprueba que este es el caso en los Ejercicios 7a, 9 y 12c. Trata de usarlo también en los ejercicios 7b y 7c (tendrás que calcular aparte las integrales de superficie sobre las tapas).
9. Comprueba que las *identidades de Green* del Ejercicio 7 de la Hoja 4, se siguen cumpliendo en dominios regulares $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (cambiando adecuadamente las integrales dobles por triples, etc...).
10. **V/F:** Si $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ cumple $\text{div } \vec{F} = 0$ y $\text{rot } \vec{F} = \mathbf{0}$ entonces $\vec{F} \equiv \text{cte}$.
- Sugerencia:* demuestra que se puede escribir $\vec{F} = \nabla\phi$ con $\Delta\phi = 0$. Después encuentra un polinomio ϕ de grado 2 con $\Delta\phi = 0$.

Algunas soluciones:

Ejer 1: (a) 0 (b) 0 (c) 4π (d) -6π . Ejer 2: (a) 2π (b) 0 (c) 2π (d) πR^2 .

Ejer 5: (a) $12\pi R^5/5$ (b) 3 (c) $3\pi/2$ (d) $1/6$ (e) $\pi h R^6/3$