

--	--	--	--	--	--

Nombre y DNI: Grupo:

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^∞ y $M = \{(x, y, z) \in \Omega : F(x, y, z) = 0\}$. Supongamos que $M \neq \emptyset$ y que $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in M$. Demostrar que

a) M es una superficie regular, en el sentido de que en un entorno de cada punto admite una representación gráfica (explícita).

b) M es una superficie regular, en el sentido de que en un entorno de cada punto admite una parametrización.

(2 puntos)

2. Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1 y $\epsilon > 0$. Probar que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ tal que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq L + \epsilon,$$

donde L denota la longitud de la poligonal que conecta los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k)$.

(1'5 puntos)

3. Sea $\mathbf{f}(x, y) = (x^3 + y^3, x - y)$. Probar que $\mathbf{f}$ lleva biyectivamente $\mathbb{R}^2$ sobre sí mismo y estudiar la diferenciabilidad de su inversa.

(1'5 puntos)

4. Calcula la integral de línea

$$\int_{\gamma} (xe^{x^2} \sin y - x^2) dx + \left(\frac{e^{x^2} \cos y}{2} - x^2 \right) dy,$$

donde $\gamma(t) = (1 + \sin t, 2 \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Nota: debes dibujar la curva, con su orientación, y si usas Green, justificar que se cumplen las hipótesis.

(1 punto)

5. En $\mathbb{R}^3$, sean $S = \{z = 4 - x^2 - y^2\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 2y\}$ y $\vec{\mathbf{F}} = (xz, yz, x^2 + y^2)$.

a) Esboza la gráfica de S

b) Parametriza S de modo que su vector normal $\vec{\mathbf{n}}$ apunte hacia arriba ($n_3 > 0$)

c) Parametriza la curva ∂S de forma compatible con la orientación dada en b)

d) Utiliza el teorema de Stokes para calcular $\oint_{\partial S} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

(2 puntos)

6. En $\mathbb{R}^3$, sean $\Omega = \{x^2 + y^2 < z^2, 0 < z < 2\}$ y $\vec{\mathbf{F}} = (xz, yz, x^2 + y^2)$. Calcula separadamente y demuestra que coinciden las integrales

$$\text{a) } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} \, dx dy dz \qquad \text{b) } \iint_{\partial \Omega} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dS.$$

Nota: En b) debes parametrizar cada trozo de $\partial \Omega$, escogiendo un vector normal $\vec{\mathbf{n}}$ adecuado.

(2 puntos)

3

Probamos que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$f(x, y) = (x^3 + y^3, x - y)$ es biyectiva. Esto equivale

a demostrar que, fijado $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, existe exacta-

mente un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\begin{cases} x^3 + y^3 = u \\ x - y = v \end{cases}$

Haciendo $x = y + v \Rightarrow (y + v)^3 + y^3 = u$, basta con probar

que esta ecuación tiene una única solución y_0 , ya que

entonces $x_0 = y_0 + v$ también está determinada de

modo único. Ahora bien, $h(y) = (y + v)^3 + y^3$ es

una función polinómica de tercer grado con $h'(y) =$

$= 3(y + v)^2 + 3y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, por lo que es estrictamente

creciente. Más aún, $\lim_{y \rightarrow -\infty} h(y) = -\infty$, $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \infty$.

Por tanto, h es biyectiva y existe un único y_0 tal que $h(y_0) = u$.

En cuanto a la diferenciabilidad de f^{-1} , notamos

que $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Jf(x, y)) =$

$= -3x^2 - 3y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$. Observamos también

que $f(0, 0) = (0, 0)$. De acuerdo con el teorema de

la función inversa $f^{-1}(u, v)$ es diferenciable con

$df^{-1}(u, v) = (df(x, y))^{-1} \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, (u, v) \neq (0, 0)$,

donde $f(x, y) = (u, v)$. En clase hemos visto

igualmente que si el jacobiano tiene determinante

nulo entonces la inversa no puede ser diferenciable

en el correspondiente punto (por supuesto, por la

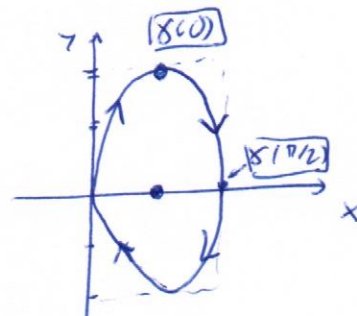
regla de la cadena, $df(x, y) \circ df^{-1}(u, v) = Id$,

luego $\det(Jf(x, y)) \det(Jf^{-1}(u, v)) = 1 \neq 0$. Por

tanto, en nuestro caso f^{-1} no es diferenciable en $(0, 0)$.

$$4) \vec{\gamma}(t) = (\underbrace{1 + \cos t}_x, \underbrace{2 \sin t}_y), t \in [0, 2\pi]$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{elipse centro } (1,0) \\ \text{y loses } a=1, b=2$$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{\gamma}(0) = (1,2) \\ \vec{\gamma}(\pi/2) = (2,0) \end{array} \right\} \rightarrow \text{sentido horario.}$$

$\Rightarrow \gamma^-$ es curva Jordan orientada $\oplus$ en

$$\Omega = \text{int}(\gamma) = \{ (x-1)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 < 1 \}$$

$$\stackrel{\text{Green}}{\Rightarrow} I = \int_{\gamma} P dx + Q dy = - \int_{\gamma^-} (P dx + Q dy) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{cambio orient} \\ \text{sentido} \end{array}$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} - \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy$$

$$= - \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{e^{x^2} \cos y}{2} - x^2 \right)_x - (x e^{x^2} \sin y - x^2)_y \right] dx dy$$

$$= - \iint_{\Omega} [x e^{x^2} \cos y - 2x - x e^{x^2} \sin y] dx dy$$

$$= \boxed{\iint_{\Omega} 2x dx dy}$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \cos t) \underbrace{r}_{2r} dr dt = 4 \cdot 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 + 4 \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos t dt \right) \left[\frac{r^2}{3} \right]_0^1$$

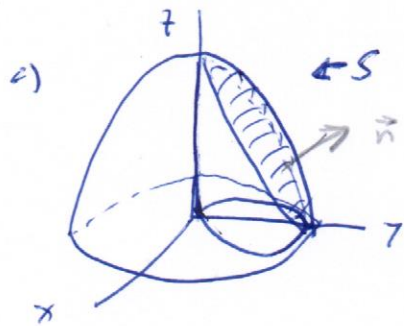
$$= 4\pi //$$

$$\begin{cases} x = 1 + r \cos t \\ y = 2r \sin t \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \in (0,1) \\ t \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$$5) S = \{ z = 4 - x^2 - y^2 \} \cap \{ x^2 + y^2 \leq 2y \}$$

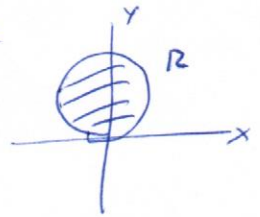
↑
parabolóide

$$\{ x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \} \leftarrow \text{cilindro}$$



porción del parabolóide sobre el cito

$$R = \{ x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \}$$



b) Parametrizar S : como gráfica

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 4(1s, t) = 4 - s^2 - t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_s \times T_t = (-2s, -2t, 1) = (2s, 2t, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{(2s, 2t, 1)}{\sqrt{4s^2 + 4t^2 + 1}} \rightarrow \text{orientación exterior con } n_3 > 0$$

c) Parametrizar ∂S

$$\partial S = \{ z = 4 - x^2 - y^2 \} \cap \{ x^2 + y^2 = 2y \}$$

$$\Rightarrow z = 4 - 2y \rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \\ z = 4 - 2y = 2 - 2\sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Notar que



el vector $\vec{n}$ queda
a la izda de ∂S
 $\Rightarrow$ orientación compatible con S

d) Podemos aplicar Stokes:

$$I = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Ague: $\vec{F} = (xz, yz, x^2 + y^2)$

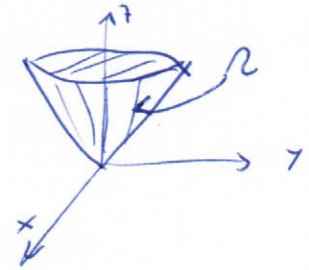
$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y - y, x - 2x, 0) \\ = (y, -x, 0)$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = (y, -x, 0) \cdot (T_s \times T_t) ds dt \\ = (y, -x, 0) \cdot (2x, 2y, 1) ds dt \\ = (2xy - 2xy) ds dt = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 0}$$

$$6) \Omega = \{x^2 + y^2 < z^2, 0 < z < 2\}$$

$$\vec{F} = (xz, yz, x^2 + y^2).$$



Probar que coinciden

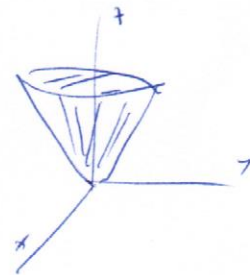
$$I_1 = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz, \quad I_2 = \iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$a) \operatorname{div} \vec{F} = (xz)_x + (yz)_y + (x^2 + y^2)_z = 2z$$

$$\Rightarrow I_1 = \iiint_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz$$

Parametrizo en cilindricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r^2 < z^2 \Leftrightarrow 0 < r < z \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ 0 < z < 2 \end{cases}$$



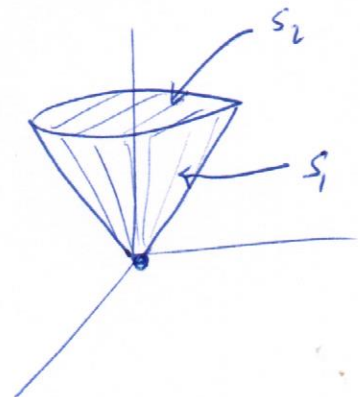
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z 2z \, r \, dr \, d\theta \, dz = 4\pi \int_0^2 z \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^z dz \\ &= 4\pi \int_0^2 \frac{z^3}{2} dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi // \end{aligned}$$

$$b) \text{ Considero } \partial \Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S_1 = \{x^2 + y^2 = z^2 \mid 0 < z < 2\}$$

$$S_2 = \overline{D_2(0)} \times \{2\} \leftarrow \text{tapa superior}$$

$$S_3 = \{(0,0,0)\} \leftarrow \text{vértice (me da 0)}$$

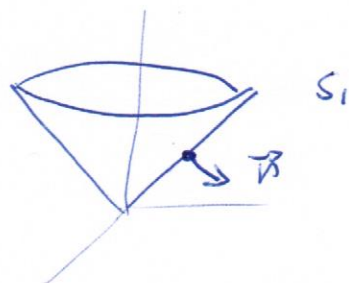


En S_1 parametrizado

$$x = r \cos \theta \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

$$y = r \sin \theta \quad r \in (0, 2)$$

$$z = r$$



$$T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \quad T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

$$\Rightarrow T_\theta \times T_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = (r \cos \theta, r \sin \theta, -r) = (x, y, -z)$$

apunta hacia afuera de S_1

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{2} \cdot z}$$

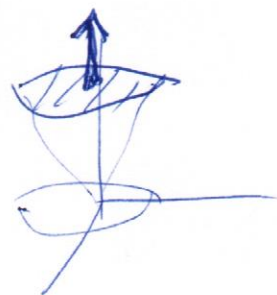
$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \underbrace{(xz, yz, x^2 + y^2) \cdot (x, y, -z)}_{x^2 z + y^2 z - (x^2 + y^2) \cdot z = 0!!} \frac{dS}{\sqrt{2} z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 0}$$

En S_2 parametrizado como gráfica

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \rightarrow dS = ds dt, \quad (s, t) \in D_2(0)$$

$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$



$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{D_2(0)} (xz, yz, x^2 + y^2) \cdot (0, 0, 1) \, dx dy$$

$$= \iint_{D_2(0)} (x^2 + y^2) \, dx dy \quad \uparrow \text{polares}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi //$$