FVV3, 2º Matemáticas **Test 1, 17/2/2025**

Nombre:

. . . .

1. Considera la ecuación

$$F(x,y) = x^2 + y^3 + xy + \alpha y + x = 0, \quad \text{donde} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   a) Determina los valores de α para los que, en un entorno de $(0,0)$, es posible despejar $y = y(x)$ mediante una función de clase C^1.

   b) Para la función $y(x)$ anterior, calcula su polinomio de Taylor de grado 2 centrado en el origen.

2. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ux^3 + vy + u = 1 \\ 2uv^3 + xy^2 + v = 1. \end{cases}$$

   a) Demuestra que es posible resolver (u,v) en términos de (x,y), en un entorno del punto $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (0,1,0,1)$, mediante una función de clase C^∞.

   b) Calcula el valor de $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})$ en el punto $(x_0,y_0) = (0,1)$.

SOLUCIONES

(1) a) Defino $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \rightsquigarrow x^2+y^3+xy+\alpha y+x := F(x,y)$

Se tiene $F\in C^1(\overset{\text{abierto}}{\mathbb{R}^2})$ por ser una expresión polinómica

$(0,0)\in\mathbb{R}^2$

$F(0,0)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \left(3y^2+x+\alpha\right)\Big|_{(0,0)} = \alpha$$

- Luego si $\alpha\neq 0$, entonces aplicando el Teor. de la Función Implícita tenemos que $\exists\, \underset{0\in}{\mathcal{U}^{\subset\mathbb{R}}}, V^{\subset\mathbb{R}^2}$ abiertos y $\exists\, \Phi: \mathcal{U} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ con $F(x,\Phi(x))=0$
  $0 \rightsquigarrow 0$

  y tq $\{(x,y)\in V : F(x,y)=0\} = \{(x,\Phi(x)) : x\in\mathcal{U}\}$.

  Luego $\Phi(x)=y(x)$ es la función pedida //

- Si $\alpha=0$, $F(x,y)=x^2+y^3+xy+x$

  Como tengo $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ con $F(0,0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$,
  $(x,y) \rightsquigarrow x^2+y^3+xy+x$

  pero $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = (2x+y+1)\Big|_{(0,0)} = 1\neq 0$, por el Criterio visto en clase podemos asegurar que $\nexists\, \varphi$ tq $y=\varphi(x)$ en un entorno del origen, entonces //

  Pues si suponemos que existe dicha φ en un entorno del origen, entonces

  en ese entorno de Θ

  $$F(x,\varphi(x))=0 \xrightarrow{\partial x} F_x + F_y\cdot\varphi'(x)=0 \xrightarrow[F_y(0,0)=0]{\text{En }(0,0)} \underset{1}{F_x(0,0)}=0$$

  // Absurdo

Cuando $\alpha \neq 0$:

b) Tendremos $P_2(0) = \Phi(0) + \Phi'(0)x + \frac{\Phi''(0)}{2!}x^2$

Donde $\Phi(0) = 0$

$$\Phi'(0) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(2x+y+1)_{|(0,0)}}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

Tenemos $F(x,y) = F(x,\Phi(x)) = 0$

$$\xrightarrow{\partial x} F_x + F_y \cdot \Phi'(x) = 0$$

$$\xrightarrow{\partial xx} F_{xx} + F_{xy}\cdot\Phi'(x) + \left(F_{yx} + F_{yy}\Phi'(x)\right)\Phi'(x) + F_y\Phi''(x) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{por ser } C^2]{F_{xy}=F_{yx}} F_{xx} + 2F_{xy}\Phi'(x) + F_{yy}\Phi'(x)^2 + F_y\Phi''(x) = 0$$

$$\longrightarrow 2 + 2\Phi'(0) + \alpha\Phi''(0) = 0 \iff \Phi''(0) = -\frac{2}{\alpha}\left(1+\Phi'(0)\right) = -\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$\begin{cases} F_x = 2x+y+1 \xrightarrow{\text{en }(0,0)} F_x(0,0) = 1 \\ F_y = 3y^2+x+\alpha \xrightarrow{\text{en }(0,0)} F_y(0,0) = \alpha \\ F_{xx} = 2 \\ F_{yy} = 6y \xrightarrow{\text{en }(0,0)} F_{yy}(0,0) = 0 \\ F_{xy} = 1 \end{cases}$$

Luego $P_2(0) = -\frac{1}{\alpha}x - \frac{\alpha-1}{\alpha^2}x^2$

② (a) Sea $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por ~~$F(x,y,u,v) = \{F_1(x,y,u,v) =$~~

$$F(x,y,u,v) = \begin{cases} F_1(x,y,u,v) = ux^3 + vy + u - 1 = 0 \\ F_2(x,y,u,v) = 2uv^3 + xy^2 + v - 1 = 0 \end{cases}$$

5

Buscaremos aplicar el Teorema de la Función Implícita, así que verificaremos dos cosas:

1º $F(0,1,0,1) = (0,0)$

2º $\left.\dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}\right|_{(0,1,0,1)} \neq 0$

Vamos a ello:

1º

$$F(0,1,0,1) = \begin{cases} F_1(0,1,0,1) = 0\cdot 0^3 + 1\cdot 1 + 0 - 1 = 0 \checkmark \\ F_2(0,1,0,1) = 2\cdot 0\cdot 1^3 + 0\cdot 1^2 + 1 - 1 = 0 \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow F(0,1,0,1) = (0,0) \checkmark$

2º

$$\left.\frac{\partial F}{\partial(u,v)}\right|_{(0,1,0,1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(0,1,0,1) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(0,1,0,1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(0,1,0,1) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(0,1,0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3+1\,\big|_{(0,1,0,1)} & y\,\big|_{(0,1,0,1)} \\ 2v^3\,\big|_{(0,1,0,1)} & 6uv^2+1\,\big|_{(0,1,0,1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Una vez verificadas estas hipótesis, por el Teorema de la Función Implícita tenemos que $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ entorno abierto del $(0,1)$ y $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$, $(0,1) \rightsquigarrow \phi(0,1) = (0,1)$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $F(x,y,\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)) = 0$ $\forall (x,y) \in \mathcal{U}$ (suponiendo $\phi = (\phi_1,\phi_2)$).

También nos asegura que $\exists\, V \subset \mathbb{R}^4$ entorno abierto del $(0,1,0,1)$ tal que

$$\{(x,y,u,v) \in V : F(x,y,z,v) = (0,0)\} = \{(x,y,\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{U}\}$$

Sin embargo, nos queda un pequeño detalle por demostrar y es que el Teorema nos asegura la existencia de una ϕ de clase $\mathcal{C}^1$ pero el enunciado nos pide que sea $\mathcal{C}^\infty$.

Es un pequeño detalle que se resuelve con algo que nos asegura el mismo Teorema de la Función Implícita y es que si $F \in \mathcal{C}^N \Rightarrow \phi \in \mathcal{C}^N$ y como claramente $F \in \mathcal{C}^\infty$ (polinomios) entonces nuestra $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ y así concluimos el primer apartado.

b) Lo vamos a hacer de manera matricial:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial (x,y)}(0,1)\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial (u,v)}(0,1)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial (x,y)}\right)(0,1)$$

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(0,1) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}(0,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \cancel{(0,1,0,1)}\,(0,1)$$

$$\begin{pmatrix} u_x(0,1) & u_y(0,1) \\ v_x(0,1) & v_y(0,1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3x^2u|_{(0,1,0,1)} & v|_{(0,1,0,1)} \\ y^2|_{(0,1,0,1)} & 2xy|_{(0,1,0,1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_x(0,1) & u_y(0,1) \\ v_x(0,1) & v_y(0,1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,1) = \cancel{(-1,1)}\ (-1,1)$$