FVV3, 2º Matemáticas   Test 2, 25/2/2025

1. Considera un alambre situado en la curva parametrizada por $\gamma(t) = \left(t, t^2, \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$, $t \in [0,1]$, y cuya densidad viene dada por la función $\rho(x,y,z) = 4xy + 9z^2$.

   a) Calcula la longitud del alambre.

   b) Demuestra que la masa total es $M = 13$.

   c) Calcula la coordenada x del centro de masas.

   d) ¿Cuáles son los puntos más y menos densos del alambre?

4

2. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ formada por la intersección de las superficies

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z = 4.$$

   a) Esboza la gráfica de las superficies y de la curva C.

   b) Halla una parametrización $\gamma(t)$ de C tal que $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (2,0,0)$.

   c) Calcula la integral $\oint_\gamma (-y, x, 0) \cdot d\vec{r}$.

   d) Determina si es conservativo en un entorno de la curva C el campo

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left(\frac{2xy}{z+1}, \frac{x^2}{z+1} - e^{-y}z, e^{-y} - \frac{x^2y}{(z+1)^2} + z\right).$$

   e) Calcula el trabajo realizado por el campo $\vec{\mathbf{F}}$ para llevar una partícula a lo largo de γ desde $(2,0,0)$ hasta $(0,0,4)$.

1.a) Calculamos la longitud del alambre como $\text{long}(\gamma) = \int_\gamma \|\gamma'(t)\| dt$.

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Curva simple (componente $\gamma_1(t) = t$ inyectiva) y

$t \rightsquigarrow (t, t^2, \frac{4}{3}t^{3/2})$ $C^1([0,1])$

$\gamma'(t) = (1, 2t, 2\sqrt{t}) \Longrightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (2t)^2 + (2\sqrt{t})^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t} = \sqrt{(2t+1)^2} =$

$= |2t+1| \underset{\uparrow}{=} 2t+1 \Longrightarrow \int_\gamma \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 (2t+1) dt = [t^2 + t]_0^1 = 1^2 + 1^2 - (0^2 + 0) =$

$2t+1 > 0 \ \forall t \in [0,1]$ $= \boxed{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{longitud alambre} = 2 \text{ u}}$

1

b) $M \equiv \int_\gamma \overset{\nearrow \text{densidad}}{\rho(x,y,z)}\,dl = \int_0^1 \rho(\gamma(t)) \cdot \overbrace{\|\gamma'(t)\|}^{2t+1}\,dt = \int_0^1 \left(4 \cdot t \cdot t^2 + 9\left(\frac{4}{3} t^{3/2}\right)^2\right) \cdot (2t+1)\,dt =$

$= \int_0^1 (4t^3 + 16t^3)(2t+1)\,dt = \int_0^1 20t^3 \cdot (2t+1) = \int_0^1 (40t^4 + 20t^3)\,dt =$ 1

$= \left[8t^5 + 5t^4\right]_0^1 = 8 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 - (0+0) = 8+5 = \boxed{13} \Longrightarrow \boxed{M = 13}$

c) $x_{CM} \equiv \dfrac{\int_\gamma x\,\rho(x,y,z)\,dl}{\underbrace{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,dl}_{M}}$; $\int_\gamma x\,\rho(x,y,z)\,dl \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 t\,(40t^4 + 20t^3)\,dt =$

directamente por el apartado b

$= \int_0^1 (40t^5 + 20t^4)\,dt = \left[\frac{20}{3}t^6 + 4t^5\right]_0^1 = \left(\frac{20}{3} \cdot 1 + 4 \cdot 1\right) - (0+0) = \frac{32}{3}$

$\Longrightarrow \quad x_{CM} = \dfrac{\frac{32}{3}}{\underbrace{13}_{M}} = \dfrac{32}{39} \Longrightarrow \boxed{x_{CM} = \frac{32}{39}}$ 1

d) Los puntos más densos son aquellos en los que la función densidad $\rho(x,y)$ sobre $\gamma[0,1] = C$ es mayor. Así, estudiamos la función $\rho(\gamma(t)) = \underbrace{20t^3}_{\text{apartado b)}}$ (Como $\gamma(t)$ describe los puntos de la curva, $\rho(\gamma(t))$ nos dará la densidad evaluada en la parametrización).

Notamos que $\rho(\gamma(t)) \equiv f(t) = 20t^3$ es función creciente $\forall t \in [0,1]$ 1

$\Longrightarrow$ $f'(t) = 60t^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, en particular, $\forall t \in [0,1]$. Así, el punto de densidad máxima se alcanza en $\gamma(1) = (1, 1, \frac{4}{3})$, y el de densidad mínima en $\gamma(0) = (0,0,0)$ (*)

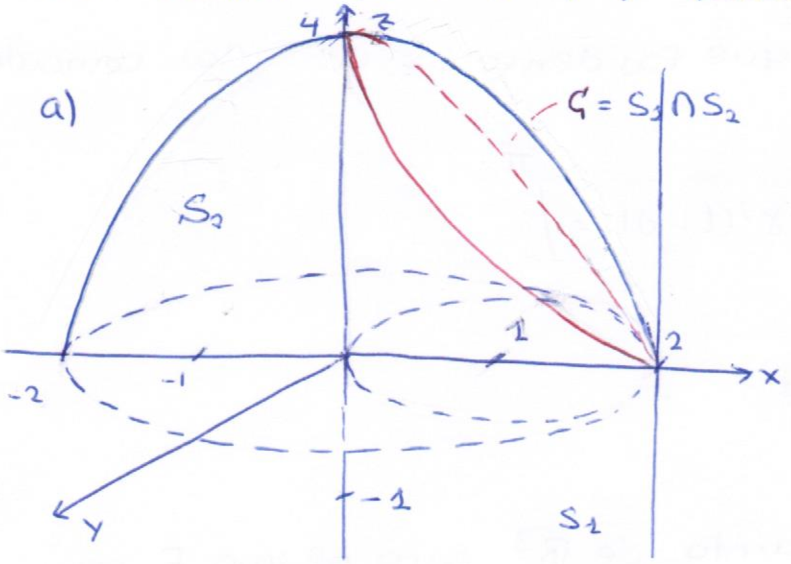
(*) Hemos escogido los puntos de la frontera: $\{0,1\}$, puesto que no se alcanza mínimo ni máximo relativo en el interior de $[0,1]$ ($\text{int}[0,1] = (0,1)$)

6

2 $S_1 = \{(x,y,z): (x-1)^2+y^2=1\}$ Cilindro con centro $(1,0,0)$

$S_2 = \{(x,y,z): z = 4-x^2-y^2\}$ Paraboloide

a)



b) Podemos parametrizar la curva sabiendo que:

$$z \overset{S_2}{=} 4-(x^2+y^2) \overset{S_1}{=} 4-2x$$

Y que $(\cos t+1, \operatorname{sen} t)$ es una parametrización de la circunferencia de radio 1 y centro $(1,0)$.

$$\gamma(t) = (\cos t+1, \operatorname{sen} t, \overbrace{4-2\cdot(1+\cos t)}^{z}) \Rightarrow$$

$$\gamma(t) = (\cos t+1, \operatorname{sen} t, 2-2\cos t) \quad t\in[0,2\pi]$$

Es la parametrización que buscamos.

Vemos que verifica $\gamma(0) = (2,0,0) = \gamma(2\pi)$

c) $F(x,y,z) = (-y,x,0)$ es continua.

La parametrización γ anterior es simple y C^1:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t+1, 0)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} 1+\underbrace{\cos t}_{\text{periódica}}\,dt = \boxed{2\pi}$$

d) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\overset{z \neq -1}{\cancel{(0,0,-1)}}\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Se puede comprobar que las derivadas cruzadas coinciden.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2x}{z+1} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{-2xy}{(z+1)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{-x^2}{(z+1)^2} - e^{-y} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$\{\overset{z \neq -1}{\cancel{(0,0,-1)}}\}$ es el único ~~punto~~ plano de $\mathbb{R}^3$ para el que F no está definida.

$= (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times (-1, +\infty)$

Basta tomar $\Omega = \{(x,y,z) : z > -1\}$ abierto.

Contiene a la curva C y es estrellado (es convexo)

Por lo que, por el teorema de Poincaré,

$\vec{F}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es conservativo.

$\gamma(t) = (1+\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 2-2\cos t)$

e) $\underset{P}{(2,0,0)} = \gamma(0) \qquad \underset{Q}{(0,0,4)} = \gamma(\pi)$

Podemos comprobar que $V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad V \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$V(x,y,z) = \dfrac{x^2 y}{z+1} + \dfrac{z^2}{2} + e^{-y} z$ es potencial de F en Ω.

puesto que verifica $\nabla V(x,y,z) = F(x,y,z)$.

Podemos aplicar entonces la regla de Barrow.

$$W = \int_{\gamma_{PQ}} \vec{F}\, d\vec{r} = V(\gamma(\pi)) - V(\gamma(0)) = V(0,0,4) - V(2,0,0) \Rightarrow$$

$$W = \frac{4^2}{2} + e^{-0} \cdot 4 = 8 + 4 = \boxed{12}$$

(el trabajo sería negativo si fuésemos de Q a P)