1. Sea R la superficie que resulta de girar la curva $(0, t^2, 2t^3/3)$, $0 \le t \le 1$, alrededor del eje z.

   a) Esbozar la superficie R.

   b) Demostrar que el área de R vale $\dfrac{8\pi(1+\sqrt{2})}{15}$.

2. Sea S la porción de la esfera de radio 2 y centro el origen cuyos puntos cumplen $x^2+y^2 > 1$ y $z > 0$.

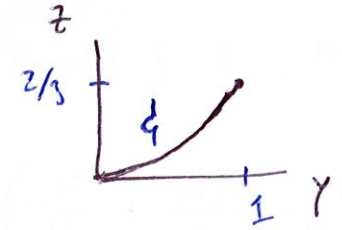
   a) Esboza la superficie S.

   b) Encuentra una parametrización de S tal que el vector normal apunte hacia afuera.

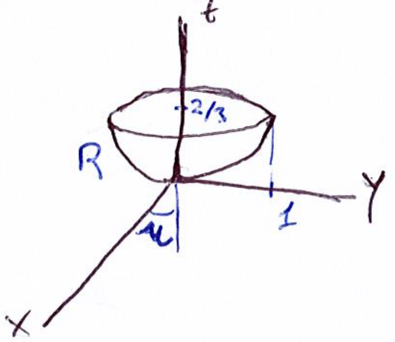
   c) Calcula la integral de superficie del campo $\mathbf{F} = (-y, x, 1)$ a través de S (con la orientación indicada en b). ¿Cómo puede interpretarse físicamente dicha integral?

1,

a) $q(t) = (0, t^2, 2t^3/3)$, $0 \le t \le 1$ $\rightsquigarrow$



• Al girar en torno a z obtenemos un paraboloide:



b) • Parametrizamos R tomando $v = t^2$, u el ángulo que recorre XY:

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = \frac{2}{3} v^{3/2} \end{cases} \Big/ \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le t^2 = v \le 1, \quad u \in [0, 2\pi]$$

$K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 2\pi], v \in [0,1]\}$

$\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $\varphi \in C^1(K)$, $\varphi(K) = R$

$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (x,y,z)$

• Calculamos la norma del vector normal, que necesitaremos para calcular el área:

$$(\varphi_u \times \varphi_v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v\,\text{sen}\,u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \text{sen}\,u & v^{1/2} \end{vmatrix} = (v^{3/2}\cos u, v^{3/2}\,\text{sen}\,u, -v)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{v^3\cos^2 u + v^3\,\text{sen}^2 u + v^2} = \sqrt{v^3+v^2} = \sqrt{v^2(v+1)} \underset{v\geq 0}{=} v\sqrt{v+1}$$

• Como B es superficie simple de clase C^1, calculamos su área con la parametrización anterior:

$$\text{área}(B) = \iint_K \|\varphi_u \times \varphi_v\|\,du\,dv = \iint_K v\sqrt{v+1}\,du\,dv = \int_0^1\left[\int_0^{2\pi} v\sqrt{v+1}\,du\right]dv =$$

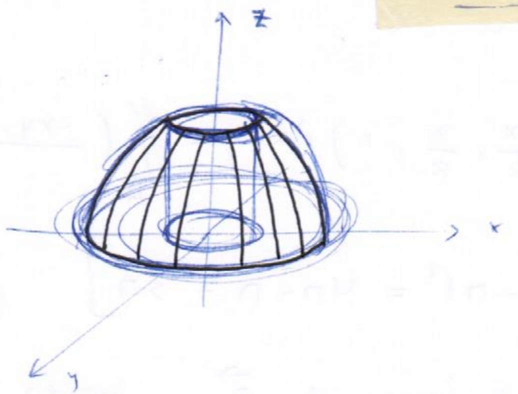
$$= 2\pi\int_0^1 v\sqrt{v+1}\,dv = \left| \begin{array}{l} \text{(INTEGRACIÓN POR PARTES)} \\ \left[\int s\cdot dt = s\cdot t - \int ds\cdot t\right] \\ s = v;\ ds = 1 \\ dt = \sqrt{v+1};\ t = \frac{2}{3}(v+1)^{3/2} \end{array} \right| = 2\pi\left(\left[v\cdot\frac{2}{3}(v+1)^{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(v+1)^{3/2}\,dv\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[(v+1)^{5/2}\right]_0^1\right) = 2\pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{15}\left[2^{5/2}-1\right]\right) =$$

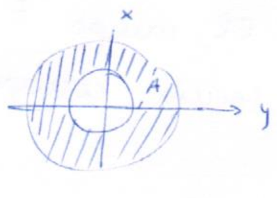
$$= 2\pi\left(\frac{20\sqrt{2}}{15} - \frac{16\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{15}\right) = 2\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{15}\right) = \frac{8\pi(1+\sqrt{2})}{15}$$

② SOLUCIONES 5

a)



b) Parametrizamos S a partir de sus dos primeras coordenadas:



$$(x,y)\in A = \{ (t,s)\in \mathbb{R}^2 : 1^2 < t^2+s^2 \leq 2 \}$$

Y como debe pertenecer a la parte superior ($z>0$) de la esfera:

$$x^2+y^2+z^2 = 2^2 \overset{z\geq 0}{\Longrightarrow} z = +\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$

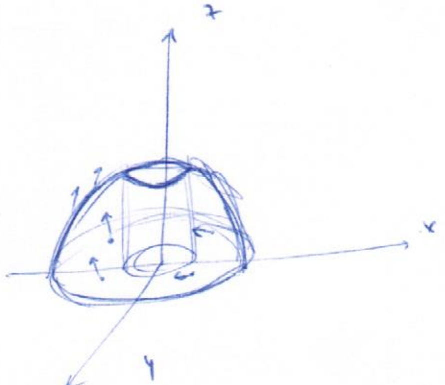
~~Calculamos~~ Luego la parametrización será:

$$T(x,y) = (x, y, \sqrt{4-(x^2+y^2)}) \quad , (x,y)\in A$$

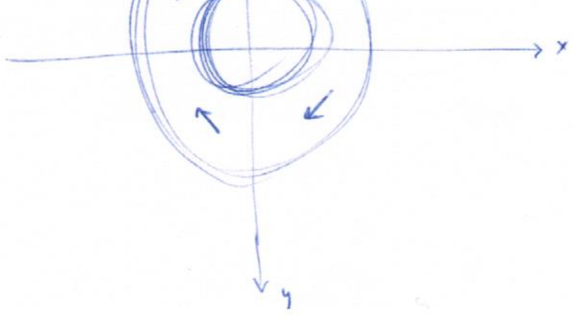
Calculamos el vector normal (llamamos $R=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$)

$$T_x = (1, 0, \frac{-x}{R}) \qquad T_y = (0, 1, \frac{-y}{R})$$

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-x}{R} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{R} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1\right) \Rightarrow$$



NOTA: Como la tercera componente es 1, es claro que el vector apunta hacia fuera



~~Calculamos por:~~

c) Calculamos la integral:

$$\left[\iint_S \vec{F}\cdot dS = \iint_A (-y, x, 1)\cdot\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1\right) dx\,dy = \iint_A \left(\frac{\cancel{-xy} \cancel{+xy}}{R} + 1\right) dx\,dy\right.$$

$$\left. = \iint_A dx\,dy = \text{Área}(A) = \pi 2^2 - \pi 1^2 = 4\pi - \pi = 3\pi \right]$$

La integral calculada mide el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S_*. El campo $\vec{F}$ representa una rotación respecto al eje z con una tercera componente vertical: