MATEMÁTICAS II **1º de grado en Ingeniería Química**

HOJA 2: Sistemas y ecuaciones diferenciales de orden superior

1. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B. Diariamente un 7% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 5% de aves de B lo hace a A.

   a) Formular una ecuación diferencial para la evolución de las poblaciones en A y B.

   b) ¿Qué porcentaje de aves habrá en cada humedal a largo plazo?

2. En una reacción química reversible se tienen dos moléculas A y B que en presencia de una enzima se transforman una en otra y viceversa, es decir $A \leftrightarrow B$. Se sabe que cada minuto el 6% de A se transforma en B, y el 2% de B se transforma en A.

   (a) Formula una ecuación diferencial para este problema. A largo plazo, ¿qué proporción habrá de cada una de las moléculas?

   (b) Resolver la ecuación si inicialmente la cantidad de A es el doble que la de B. ¿Cuándo será la cantidad de B el doble que la de A?

3. Un restaurante dispone de dos salones comedor, uno para fumadores y otro para no fumadores. El sistema de aire acondicionado limpia un 1% del volumen de cada sala por minuto. Por otro lado, los salones se comunican entre sí por una puerta abierta, intercambiando entre ellos otro 1% de su volumen cada minuto. Formula con ecuaciones diferenciales las siguientes dos situaciones.

   (a) A la hora de cierre hay 100 litros de humo en la primera sala y nada en la segunda. Resuelve la ED y determina la cantidad máxima de humo en la segunda sala.

   (b) A la hora de apertura las salas están limpias, pero se generan durante la noche 3 litros de humo por minuto en la primera sala, ¿qué cantidad de humo habrá en la segunda sala a largo plazo?

4. En el curso de un río hay dos lagunas. Se ha observado que cada día la primera laguna vierte un 10% de su contenido en la segunda, y ésta un 5% de su contenido río abajo. Un camión accidentado vierte sobre la primera laguna 100 litros de un producto tóxico muy soluble.

   (a) Formula una ecuación diferencial para la evolución del contaminante.

   (b) Resuelve la ED y calcula cuándo será máxima la cantidad de contaminante en la segunda laguna, y qué cantidad de contaminante habrá en cada una de ellas en ese momento.

   (c) Determina la cantidad de contaminante acumulado río abajo tras t días. ¿Cuánto tardará en llegar un tercio del contaminante inicial? ¿Cuánto hubiera tardado si no estuviera la segunda laguna?

5. Una salina de 200 m^3 intercambia con el mar un caudal de 5 m^3 de agua por día. La salina está conectada con canales con una pequeña balsa de volumen 30 m^3, intercambiándose entre ellas 1 m^3 de agua al día. Una plaga de algas llega a esa zona costera, de modo que el agua de mar que entra en la salina tiene una concentración de 50 gramos de algas por m^3. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan respectivamente la cantidad de algas en la salina y en la balsa tras t días.

   a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ e $y(t)$.

   b) Formula una ecuación diferencial para las *concentraciones* de algas $q_1(t)$ y $q_2(t)$, en la salina y en la balsa. ¿Cuáles serán las concentraciones de algas a largo plazo?

6. Estudiamos una población de aves clasificada en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultos fértiles (de 1 a 2 años), y adultos infértiles (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las aves jóvenes y un 54% de las adultos fértiles sobreviven cada año. Además cada ave fértil produce dos crías al año (en promedio), y ninguno de los adultos infértiles sobrevive al tercer año.

   (a) Describir la evolución de la población como una ecuación diferencial.

   (b) Transcurridos unos años, ¿en qué porcentaje decrecerá anualmente la población de aves?

   (c) Determina cuál debería ser el porcentaje de supervivencia de los jóvenes para que la población no se extinga.

7. Una población de venados, dividida para su estudio en jóvenes y adultos, satisface la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x+y \\ y' & = & 0'6x-0'2y \end{array}\right.$$

   (a) Determina a partir de la ecuación las tasas de supervivencia de jóvenes y adultos, y el número medio de crías por adulto.

   (b) Demuestra que, a la larga, la población crecerá aproximadamente un 27% cada año.

   (c) Para evitar un crecimiento incontrolado, se permite la caza anual de una proporción h de los venados adultos. ¿Cuál será ahora la ecuación diferencial? Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.

   (d) ¿Es posible seleccionar h de manera que la población de venados se mantenga estable?

8. `Modelo competitivo:` Dos especies compiten en un territorio; la presencia de una disminuye la tasa de crecimiento de la otra y viceversa:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 3x-y \\ y' = -2x+2y \end{array}\right.$$

   Resuelve la ecuación sabiendo que inicialmente $x(0) = 90$ y $y(0) = 150$. ¿Desaparece alguna de las dos especies?

9. `Modelo simbiótico:` Dos especies cooperan; la tasa de crecimiento de cada una mejora con la presencia de la otra pero sufre con la abundancia de ella misma:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -2x+4y \\ y' = x-2y \end{array}\right.$$

   Resuelve la ecuación sabiendo que inicialmente $x(0) = 200$ y $y(0) = 500$. Esboza las gráficas de las soluciones.

10. `Modelo presa-depredador:` La abundancia del depredador daña la tasa de crecimiento de la presa:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x+y \\ y' = -x+y \end{array}\right.$$

   ¿Cuál es el depredador y cuál la presa? Resuelve la ecuación para $x(0) = y(0) = 1000$.

11. La siguiente ecuación es un modelo más realista de presa-depredador (V. Volterra 1926)

$$\begin{cases} x' = -0'1x + 0'03xy \\ y' = 0'2y - 0'25xy \end{cases}$$

(a) Explica cómo crece cada población en ausencia de la otra, y qué ocurre cuando están juntas. ¿Cuál es la solución de equilibrio?

(b) Suponer ahora que, en una época de bonanza mejoran las tasas de supervivencia de ambas especies, quedando la ecuación de la forma

$$\begin{cases} x' = -0'02x + 0'03xy \\ y' = 0'3y - 0'25xy \end{cases}$$

¿Cuál es ahora la solución de equilibrio? ¿Es razonable que a pesar de la bonanza se haya *reducido* la población de presas?

(c) Suponer por el contrario que se introduce un pesticida para intentar acabar con la presa, si bien dicho pesticida también afecta al crecimiento natural del depredador, quedando la ecuación

$$\begin{cases} x' = -0'2x + 0'03xy \\ y' = 0'05y - 0'25xy \end{cases}$$

¿Cuál es ahora la solución de equilibrio? ¿Es razonable que el efecto del pesticida haya sido *aumentar* la población de presas?

Nota: En todos los casos es ilustrativo dibujar con ordenador las soluciones para un dato inicial fijo (digamos $x(0) = 2$, $y(0) = 8$), observando en las gráficas cómo afectan los cambios a las poblaciones.

12. Ciertas reacciones químicas tienen comportamientos oscilatorios parecidos al ejercicio anterior (*chemical clocks* o *chemical oscillators*).

• Consideremos una reacción química de la forma

$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to E$$

donde la cantidad de reactivo A es muy grande (y se puede suponer constante). Formula un modelo para la evolución de las concentraciones $x(t), y(t)$ de los reactivos X e Y.

• En el modelo *Brusselator*[1] las concentraciones $x(t)$ e $y(t)$ de dos reactivos X e Y cumplen la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x' = a - (b+1)x + x^2y \\ y' = bx - x^2y \end{cases}$$

(a) Calcula las soluciones de equilibrio.

(b) Comprueba que si $b < 1 + a^2$, el sistema evoluciona hacia una solución de equilibrio constante.

(c) Cuando $b > 1 + a^2$ el sistema evoluciona hacia una solución periódica (*chemical clock*). Comprueba este hecho con un ordenador, utilizando por ejemplo $a = 1$ y $b = 2.5$ (con datos iniciales arbitrarios).

[1] Modelo teórico introducido por el premio Nobel de Química I. Prigogine en 1968; las reacciones son

$$A \to X \qquad 2X + Y \to 3X \qquad B + X \to Y + D \qquad X \to E.$$

13. Para los circuitos de la figura, la carga del condensador $Q(t)$ y la intensidad de corriente por la inductancia $I(t)$ cumplen respectivamente

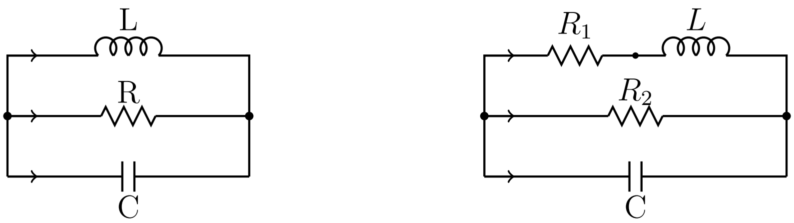
$$\text{i)}\ \begin{cases} Q' = -\frac{1}{RC}Q - I \\ I' = \frac{1}{LC}Q \end{cases} \qquad\qquad \text{ii)}\ \begin{cases} Q' = -\frac{1}{R_2C}Q - I \\ I' = \frac{1}{LC}Q - \frac{R_1}{L}I \end{cases}$$

(a) Resolver (i) para $R = L = 1$, $C = 1/2$, $Q(0) = 1/2$, $I(0) = 2$.

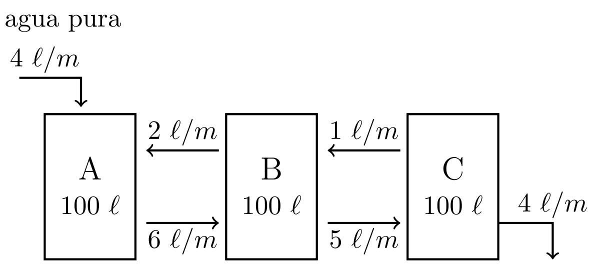
(b) Resolver (i) para $R = C = 1$, $L = 4$, $Q(0) = 2$, $I(0) = 1$.

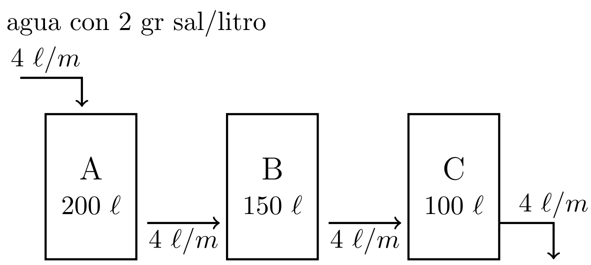
(c) Resolver (ii) para $R_1 = L = 1$, $R_2 = 2$, $C = 1/2$, $Q(0) = -1$, $I(0) = 1$.

(d) Resolver (ii) para $R_1 = 1$, $R_2 = 3/5$, $L = 2$, $C = 2/3$.



14. Para cada una de las figuras, formula un sistema de ecuaciones diferenciales para las cantidades de sal $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ en cada uno de los tanques. Sin resolver las EDs, determina las cantidades de sal en cada tanque a largo plazo.





15. Resuelve los siguientes sistemas no homogéneos:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = 3x - 2y + t \end{cases} \qquad\qquad \text{b)}\ \begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = x - 2y + \cos t \end{cases}$$

16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$a)\ \begin{cases} x'' + 5x' + 6x = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x'' + 2x' + 2x = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Esboza la gráfica de la solución en cada caso, y determina el máximo de $x(t)$.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales *no homogéneas*:

$$a)\begin{cases} x'' + 5x' + 6x = 5\sin t \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 3t + 2 \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x'' + 2x' + 2x = te^{-t} \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Esboza la gráfica de la solución en cada caso, y determina el comportamiento a largo plazo.

18. En un circuito LCR la cantidad de carga en el condensador, $Q(t)$, cumple

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0.$$

Suponer que $L = 0'25$, $R = 10$ y $C = 0'001$. Si inicialmente $Q(0) = 3$ y $Q'(0) = 0$

(a) Hallar la carga en el condensador $Q(t)$ y esbozar su gráfica

(b) ¿Cuándo será la carga en el condensador menor que 0'01?

(c) ¿Cuánto debería ser R para que la carga en el condensador no oscilara?

19. Tenemos un objeto de masa 1 kg sujeto a un muelle de constante $k = 0'1$ que se desliza sobre una superficie con rozamiento $\mu = 0'2$. El objeto está inicialmente en equilibrio y le imprimimos una velocidad de 3 m/seg.

(a) Calcula la posición exacta del objeto en tiempo t, esbozando su gráfica.

(b) ¿Cuáles son las posiciones máxima y mínima que alcanza el objeto? ¿A partir de que momento permanecerá a menos de 0'1 metro del punto de equilibrio?

(c) Suponer que aplicamos adicionalmente una fuerza externa $F(t) = \sin(0'3t)$. Utiliza el ordenador para dibujar la solución en este caso, determinando las posiciones máxima y mínima del objeto.

20. En Mecánica Cuántica, la probabilidad de que una partícula recluida en el segmento rectilíneo $[0, 1]$ esté en la posición x viene dada por $|\psi(x)|^2$ donde $\psi(x)$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) \;=\; E\,\psi(x), \qquad 0 < x < 1$$

con $\psi(0) = \psi(1) = 0$, y $E \geq 0$ la energía del sistema.

(a) Probar que esta ecuación sólo tiene soluciones si $E = n^2\,\frac{\hbar^2\pi^2}{8m}$ para algún $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Calcular la solución y esbozar la gráfica de $|\psi(x)|^2$ cuando $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.