

HOJA 3: Integrales de funciones de 2 variables

1. Calcular las siguientes integrales dobles*

$$\begin{array}{lll}
 a) \iint_R (x+y)^2 dx dy & b) \iint_{[0,1] \times [0,3]} ye^{-xy} dx dy & c) \iint_R \sin(\pi(x+y)) dx dy \\
 d) \iint_T (1-x)y dx dy & e) \int_0^2 \int_{x^2}^{e^{x^2}} xy dy dx & f) \iint_D x dx dy
 \end{array}$$

2. Calcula la integral de $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ sobre las regiones R , T y D , esbozando en cada caso a qué volumen corresponde la integral.

3. Calcula las integrales sobre el disco unidad D de las siguientes funciones radiales, esbozando los volúmenes de las gráficas correspondientes

$$a) 1 - (x^2 + y^2) \quad b) 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad c) e^{-x^2 - y^2} \quad d) (x^2 + y^2)e^{-4(x^2 + y^2)}$$

4. (a) Hallar la masa de una placa rectangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ y cuya densidad viene dada por la función $\rho(x, y) = xe^{-2xy}$.

(b) Hallar la carga total de una placa circular situada en el disco de centro el origen y radio 3, y cuya densidad de carga viene dada por la función $\rho(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

(c) Hallar la temperatura media de una placa triangular con vértices $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,2)$ sabiendo que $T(x, y) = 32d^2$, donde d es la distancia de (x, y) al origen.

5. Calcula el volumen del tetraedro generado por los vectores \vec{i} , $2\vec{j}$, $3\vec{k}$.

6. Calcula el volumen de un granero de base rectangular 6×12 , y paredes verticales de altura 9 al frente (que está del lado que mide 6) y 12 detrás.

7. Consideramos los siguientes campos de vectores

$$\vec{v}_1 = (2x, -2y), \quad \vec{v}_2 = (1, 2x), \quad \vec{v}_3 = (x, 2y), \quad \vec{v}_4 = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

(a) Esbozar los campos de vectores

(b) Calcular la divergencia y el rotacional de cada uno de ellos

(c) Determinar las líneas de flujo de los campos, esbozando las trayectorias.

8. Consideramos las siguientes curvas para $t \in [0, 1]$:

$$\vec{\gamma}_1(t) = (3 \cos(2\pi t), 3 \sin(2\pi t)), \quad \vec{\gamma}_2(t) = (e^{2t}, e^{-2t}), \quad \vec{\gamma}_3(t) = (2\pi t - \sin(2\pi t), 1 - \cos(2\pi t)).$$

(a) Esboza las trayectorias de las curvas

(b) Calcula la velocidad y la aceleración cuando $t = 1$

(c) Calcula la longitud de las curvas $\vec{\gamma}_1$ y $\vec{\gamma}_3$.

(d) Si las partículas $\vec{\gamma}_1$ y $\vec{\gamma}_2$ se escapan por la tangente cuando $t = 1$, hallar la posición un segundo después.

* En este ejercicio, y en los siguientes denotamos

$$R = [0, 1] \times [0, 1] \quad D = \text{disco unidad} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$T = \text{interior del triángulo de vértices } (0, 0), (0, 1), (1, 1).$$

9. Hallar las siguientes integrales de línea, donde ∂D es la circunferencia unidad (en sentido antihorario)

$$a) \oint_{\partial D} -y dx + x dy \quad b) \oint_{\partial D} 2x dx + 3y dy \quad c) \oint_{\partial D} x^2 dx + 2xy dy$$

10. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{\mathbf{F}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}$ para mover una partícula a lo largo de las siguientes curvas

$$a) (\cos^3 t, \sin^3 t), t \in [0, 2\pi] \quad b) (t, t), t \in [0, 1] \quad c) (t, t^2), t \in [0, 1]$$

11. Calcula la circulación $\oint_C \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ del campo $\vec{\mathbf{V}} = -y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}}$ para las siguientes curvas C (en sentido antihorario)

(a) la circunferencia de centro el origen y radio R

(b) el cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$

(c) el rombo con vértices $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

12. Un mol de gas ideal se halla inicialmente a temperatura 350°K y presión 2 atm , y experimenta una transformación que lo lleva a aumentar en 10°K su temperatura y en 2 atm su presión. Obtener la variación de volumen que se produce en esta transformación calculando sobre un camino apropiado la integral

$$\int_{\gamma} dV = \int_{\gamma} \frac{r}{P} dT - \frac{rT}{P^2} dP.$$

13. Experimentalmente se observa que la temperatura T de cierta masa gaseosa cumple

$$dT = V dP + (P - aV^{-2}) dV.$$

Hallar la variación de temperatura necesaria para pasar de $P = 1, V = 1$ a $P = 3, V = 2$.

14. Utiliza el teorema de Green para calcular las siguientes integrales

$$a) \oint_{\partial D} -y^3 dx + x^3 dy \quad b) \oint_{\partial R} \cos y dx + x \sin y dy \quad c) \oint_{\partial T} x dy - y dx$$

15. El teorema de Green puede también escribirse como

$$\int_{\partial \Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{\mathbf{E}},$$

donde la primera integral representa el flujo neto del campo $\vec{\mathbf{E}}$ a través de $\partial \Omega$. Esboza los siguientes campos y utiliza la fórmula anterior para calcular los flujos correspondientes

(a) $\vec{\mathbf{E}} = x\vec{\mathbf{i}} + y^3\vec{\mathbf{j}}$ a través del cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$

(b) $\vec{\mathbf{v}} = 3x\vec{\mathbf{i}} - 2y\vec{\mathbf{j}}$ a través de la circunferencia unidad

(c) $\vec{\mathbf{B}} = x\vec{\mathbf{i}} + 2x\vec{\mathbf{j}}$ a través de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

16. La ley de Fourier establece que la variación de temperatura por unidad de tiempo en un recinto Ω debe coincidir con el flujo neto de $-\nabla T$ a través de $\partial \Omega$. Suponer que $T(x, y) = 4 - 2x^2 - 4y^2$.

(a) Esboza las curvas de nivel $c = 0, 2, 4$, y la dirección del campo $-\nabla T$ en la que fluye el calor

(b) Calcula la variación de temperatura por unidad de tiempo en el disco unidad.

17. Repite el ejercicio anterior tomando $T(x, y) = 4 - 2x^2 + 4y^2$ (en este caso esboza las curvas de nivel para $c = 0, 2, 4, 6, 8$)