MATEMÁTICAS II $\qquad$ 1º de grado en Ingeniería Química

Práctica 1: Ejercicios sugeridos para practicar con ordenador

1. La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ se obtiene de la recurrencia

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

con datos iniciales $A_1 = A_2 = 1$. Fue introducida en el siglo XI como un modelo sencillo para el crecimiento mensual en una población de conejos.

(i) Utiliza Excel para calcular los primeros 30 términos, dibujando su gráfica. ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

(ii) Determina el porcentaje de crecimiento de esta población a largo plazo. Para ello debes calcular con Excel A_n/A_{n-1}, y ver qué ocurre para n grande.

2. En una ciudad, la población de palomas urbanas pierde una cuarta parte de los individuos cada año. Para compensar la caída, el ayuntamiento suelta 200 nuevos ejemplares al final de cada año. Si $x(n)$ =número de palomas a principios del año n, se cumple la recurrencia

$$x(n+1) = \frac{3}{4}x(n) + 200$$

(a) Si $x(0) = 1000$, usar Excel para determinar el número de palomas en los próximos 30 años, esbozando la gráfica. ¿Cuál será el número de palomas a largo plazo?

(b) ¿Cuántas palomas debería soltar el ayuntamiento cada año para que a largo plazo hubiese 1200 ejemplares?

3. La población mundial en 1975 era de unos 4 mil millones de habitantes. Varios estudios consideran que la población del planeta cumpliría aproximadamente la ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = 0'036\,p(t) - 0'0033\,p(t)^2$$

donde $p(t)$ es el número de individuos (en miles de millones).

(a) Utiliza Excel para estimar la población desde 1975 hasta 2150, esbozando la gráfica. Para ello puedes usar la recurrencia

$$p(n+1) = p(n) + 0'036\,p(n) - 0'0033\,p(n)^2$$

(b) ¿Cuál sería la capacidad máxima de la población? ¿Cuándo se alcanzaría el 90% de dicha capacidad máxima?

Nota: puedes contrastar estas predicciones con los datos de 1985, 1995 y 2005, que han sido respectivamente de $4'8$, $5'7$ y $6'5$ mil millones de habitantes.

4. Ejerc 13c: Resolver numéricamente la ED

$$\frac{dx}{dt} = 0'5(1-x)(3-x) - 0'25t, \quad \text{con } x(0) = 0$$

usando el método de Euler con pasos $h = 0'5$ y $h = 0'1$, esbozando las gráficas de las soluciones para $t \in [0, 10]$. En Excel, debes introducir la recurrencia

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{y} \quad x_{n+1} = x_n + h\big[0'5(1-x_n)(3-x_n) - 0'25t\big].$$

¿Cuándo es máxima la concentración de X? ¿Cuándo se termina la reacción?

5. Ejerc 14: Resolver numéricamente para $0 \le t \le 12$ la ED

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \mathrm{sen}(\pi t), \quad \text{con } x(0) = 1,$$

usando el método de Euler con $h = 0'1$. ¿Qué comportamiento observas a largo plazo?

6. Este ejercicio ilustra cómo modelos discretos sencillos basados en recurrencias pueden tener comportamientos caóticos. Consideramos la ecuación logística discreta

$$p(n+1) = k\, p(n)\, \big(1 - p(n)\big).$$

Cabría esperarse que a largo plazo $p(n)$ se acercara a una solución de equilibrio.

(a) Utiliza Excel para comprobar gráficamente este hecho cuando $k = 2$, tomando como datos iniciales $p(0) = 0'1$ y $p(0) = 0'2$.

(b) Para $3 < k < 3'57$ el comportamiento a largo plazo de $p(n)$ es periódico; compruébalo con $k = 3'2$ y $k = 3'5$, y los datos iniciales anteriores.

(c) Cuando $k > 3'57$ el comportamiento a largo plazo de $p(n)$ es completamente caótico; compruébalo con $k = 3'8$ y $k = 3'9$, y los datos iniciales anteriores.

Nota: este fenómeno también puede ocurrir en los modelos basados en ecuaciones diferenciales, pero sólo a partir de dimensión 3, por ejemplo en las ecuaciones de la meteorología (mariposa de Lorenz).

7. Este ejercicio ilustra algunas deficiencias del método de Euler. Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \qquad \text{con } x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Claramente, la solución del sistema es $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

(i) Utiliza el método de Euler con paso $h = 0'1$ para aproximar $x(t), y(t)$ cuando $t \in [0, 6'3]$. Es decir, plantea las recurrencias

$$x_{n+1} = x_n - hy_n, \qquad y_{n+1} = y_n + hx_n \quad \text{con } x_0 = 1, \ \ y_0 = 0.$$

Representa los datos (x_n, y_n) en el plano xy. ¿Qué observas?

(ii) Utiliza ahora el método de Euler mejorado con $h = 0'2$. Es decir, debes plantear las recurrencias

$$x_{n+1} = x_n - h\,\frac{y_n + \tilde{y}_{n+1}}{2}, \quad y_{n+1} = y_n + h\,\frac{x_n + \tilde{x}_{n+1}}{2}$$

donde

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n - hy_n, \quad \tilde{y}_{n+1} = y_n + hx_n.$$

Representa los datos (x_n, y_n) y compara con la situación anterior.