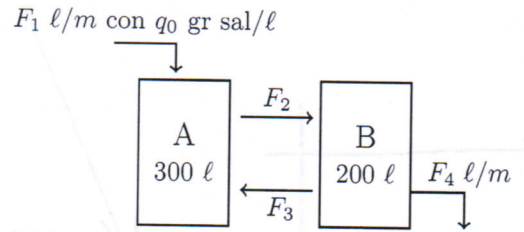


Nombre:

1.- Se tienen dos tanques con volúmenes constantes de 300 y 200 litros de agua, respectivamente. Las cantidades de sal $x(t)$ e $y(t)$ en cada uno de los tanques tras t minutos cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) = -0'02x(t) + 0'01y(t) + 6 \\ y'(t) = 0'02x(t) - 0'03y(t) \end{cases}$$



- (a) A partir de la ED determina el valor de las constantes F_1, F_2, F_3, F_4 y q_0 en el diagrama.
- (b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de sal en cada tanque? ¿Y la concentración?
- (c) Resuelve la ED para $x(0) = 750$ gramos de sal, $y(0) = 0$.
- (d) Esboza las gráficas de $x(t)$ e $y(t)$ obtenidas en (c). ¿Cuándo será máxima $y(t)$?

Nota: 7 puntos

a) $F_2 = 2\% \text{ de } A = 6 \frac{\text{l}}{\text{min}}$
 $F_3 = 1\% \text{ de } B = 2 \frac{\text{l}}{\text{min}}$ $\Rightarrow F_1 = 4 \frac{\text{l}}{\text{min}}$ (para que vol A sea cte)
 $F_4 = 4 \frac{\text{l}}{\text{min}}$ (idem con vol B).

b) A largo plazo $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}_{eq}$

$$\begin{cases} 0 = -2x + y + 600 \\ 0 = 2x - 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y + y + 600 = 0 \\ 2x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 600 \Rightarrow y = 300 \\ \Rightarrow x = 450 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{x}(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 450 \\ 300 \end{pmatrix}$ gr NaCl.

c) Por un tema $\vec{x}(t) = \vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{p}_2 e^{\lambda_2 t} + \vec{x}_{eq}$.

Autovalores

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{A} - \lambda I| = (2+\lambda)(3+\lambda) - 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Autovectores

$\lambda = -1$ Busco $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $\tilde{A}\vec{p}_1 = (-1)\vec{p}_1$

$$\begin{cases} -2u + v = -u \\ 2u - 3v = -v \end{cases} \rightarrow u = v \Rightarrow \vec{p}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = -4} \quad \text{Busco } \vec{p}_2 = (y): \quad \tilde{A} \vec{p}_2 = (-4) \vec{p}_2$$

$$\begin{cases} -2u + v = -4u & \rightarrow v = -2u \rightarrow \vec{p}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 2u - 3v = -4v \end{cases}$$

Por tanto $\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.01t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-0.04t} + \begin{pmatrix} 450 \\ 300 \end{pmatrix}$

Dato inicial

$$x(0) = 750 = c_1 + c_2 + 450$$

$$y(0) = 0 = c_1 - 2c_2 + 300$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 300 \\ c_1 - 2c_2 = -300 \end{cases}$$

$$\underline{3c_2 = 600 \Rightarrow c_2 = 200}$$

$$c_1 = 300 - c_2 = 100$$

$$x(t) = 100 e^{-0.01t} + 200 e^{-0.04t} + 450$$

$$y(t) = 100 e^{-0.01t} - 400 e^{-0.04t} + 300$$

(d) • $x(t)$ decrece pues $x'(t) = -e^{-0.01t} - 8e^{-0.04t} < 0$

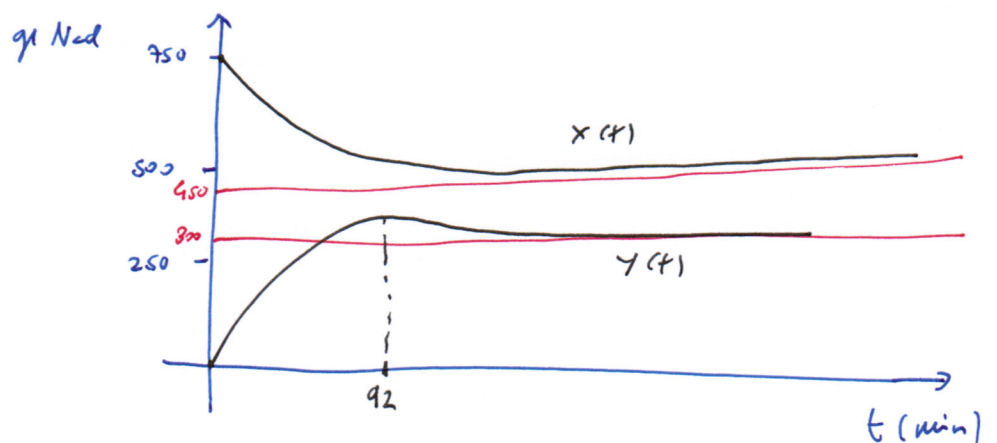
• $y(t)$ crece y luego decrece, con máximos en $t \mid y'(t) = 0$

$$y'(t) = -e^{-0.01t} + 16e^{-0.04t} = 0 \Rightarrow e^{-0.01t} = 16e^{-0.04t}$$

$$\Rightarrow e^{0.03t} = 16 \Rightarrow t = \frac{\ln 16}{0.03} = 92'42 \text{ min.}$$

La cantidad máxima de ocl en B es $\approx 1 \text{ hora y media.}$

$$y(92'42) = 329'76 \text{ gr NaCl.}$$



2.- La relación entre T y P cuando se produce un cambio de fase (por ejemplo de líquido a gas) cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dT} = \frac{rP}{T^2}$$

donde r es una constante que depende del compuesto. Para el cambio de N_2 líquido a gas se sabe que a presión $P = 1$ atm la temperatura de ebullición es $T = 77'2^\circ\text{K}$, mientras que a presión $P = 0'5$ atm ésta baja a $T = 71'7^\circ\text{K}$. En estas condiciones,

(a) calcula $P(T)$ y determina el valor de la cte r

(b) Si haciendo el vacío conseguimos que $P = 0'01$ atm, ¿qué temperatura tendrá el N_2 líquido que permanece en el recipiente?

Nota: 4 puntos 3

a) Separando variables $\frac{dP}{P} = r \frac{dT}{T^2}$

$$\Rightarrow \ln P = r \int T^{-2} dT = -\frac{r}{T} + C$$

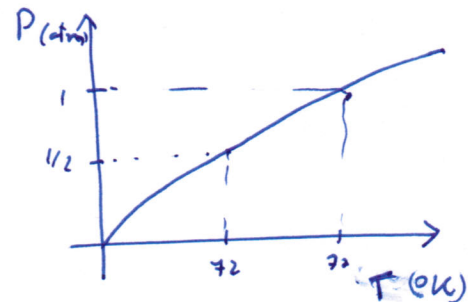
Usamos los datos

$$P = 1 \rightarrow T = 77'2 \rightarrow 0 = -\frac{r}{77'2} + C \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow C = \frac{r}{77'2} \\ \Downarrow \\ \ln 2 = r \left(\frac{1}{71'7} - \frac{1}{77'2} \right) \end{array} \right.$$

$$P = \frac{1}{2} \rightarrow T = 71'7 \rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\frac{r}{71'7} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 697'59} \Rightarrow C = 9'036$$

$$\Rightarrow \boxed{P = e^{9'036 - \frac{697'59}{T}} = 8901 \cdot e^{-\frac{697'59}{T}}}$$



b) Σ . $P = 0'01$

$$\Rightarrow \ln 0'01 = -\frac{r}{T} + 9'036$$

$$\Rightarrow \frac{r}{T} = 9'036 + \ln 100 = 13'641 \Rightarrow T = \frac{697'59}{13'641} = 51'14^\circ\text{K}$$

$$\approx -222^\circ\text{C}$$

(este es el pto ebullición.
El N_2 líquido estará por debajo de esa temperatura.)