MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química Control 2, 17/5/2011

Nombre:

....

Nota: La primera pregunta puntuará adicionalmente como Test nº 6

1.- Consideramos la porción de la bola unidad dada por

$$\Omega = \left\{ r \in [0,1],\ \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

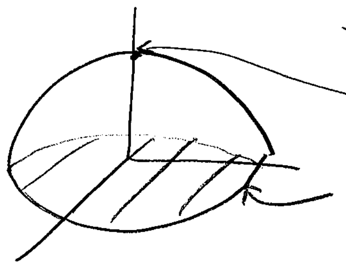
con densidad $\rho = r^2 \cos\varphi$.

(a) Esboza Ω, indicando los puntos más densos y menos densos

(b) Calcula la masa total de Ω

(c) Calcula la integral sobre la *superficie* de Ω de la función $f(x,y,z) = z^2$.

(a)



Ω = semi-esfera superior (maciza)

pto más denso $(0,0,1) \to \rho = 1$

ptos menos densos $\{\varphi = \frac{\pi}{2}\} \to \rho = 0$

(b)
$$M_T = \iiint_\Omega \rho \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\varphi \; r^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \left(\int_0^1 r^4 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \right) = \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi / 5 \quad //$$

(c)
$$\iint_{\partial\Omega} z^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} \quad //$$

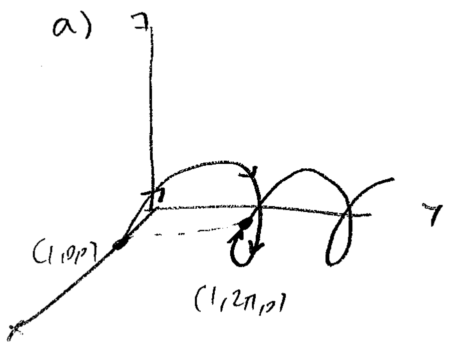
2.- Tenemos un fluído con campo de velocidades $\vec{\mathbf{v}} = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

a) Calcula la circulación de $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo de la curva $\vec{\gamma}(t) = (\cos t,\ t,\ \sin t)$, desde el punto $(1,0,0)$ hasta $(1,2\pi,0)$.

b) Calcula el flujo neto de $\vec{\mathbf{v}}$ que sale a través de la superficie de la esfera unidad.

c) Justica si existe una función $h(x,y,z)$ tal que $\vec{\mathbf{v}} = \nabla h$, y en su caso calcúlala.

a)



$$C = \int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{\gamma}} x\,dx + y^2\,dy + z\,dz$$

$$\begin{cases} x = \cos t & \rightarrow \quad dx = -\sin t\,dt \\ y = t & \qquad\; dy = dt \\ z = \sin t & \qquad\; dz = \cos t\,dt \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad C = \int_0^{2\pi} \left(-\cos t \cancel{\sin t} + t^2 + \sin t \cancel{\cos t}\right) dt = \left(\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^3}{3}$$

b)

$$\text{Flujo} = \iint_{\partial S} \vec{v}\cdot\vec{n} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_B \operatorname{div}\vec{v} = \iiint_B (1 + 2y + 1)\,dV$$

$$= \iiint_B 2\,dV + \underbrace{\iiint_B 2\cancel{y}\,dV}_{=0} = 2\,V(B) = 2\cdot\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

c) Se ve a ojo que $h(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2}$,

pues $\nabla h = (x, y^2, z)$.