Matemáticas II, 1° Ing. Química. Examen de julio 21/7/2011

Nombre y dni: ....

1.- En una región se observa que la superficie forestal está decreciendo a un ritmo del 5% cada año. Para compensar esta caída, el gobierno replanta anualmente 15 km^2 de bosque nuevo. Si inicialmente $x(0) = 100$ km^2

(a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ = superficie forestal (en km^2) en el año t

(b) Resuelve la ED y esboza la gráfica de $x(t)$.

(c) ¿Cuál será la superficie forestal de la región a largo plazo? ¿Cuánto debería replantar anualmente el gobierno si quisiera superar a largo plazo los 500 km^2 de bosque?

Nota: 3 puntos

$x(0) = 100 km^2$

$x(t)$ = superficie en km^2 en el año t

$x'(t) = -r \cdot x(t) + h$

$x'(t) = -0'05 \cdot x(t) + 15$

solución: $x(t) = c \cdot e^{-0'05t} + 300$ $\qquad x_{eq} = \frac{h}{r} = \frac{15}{0'05} = 300$

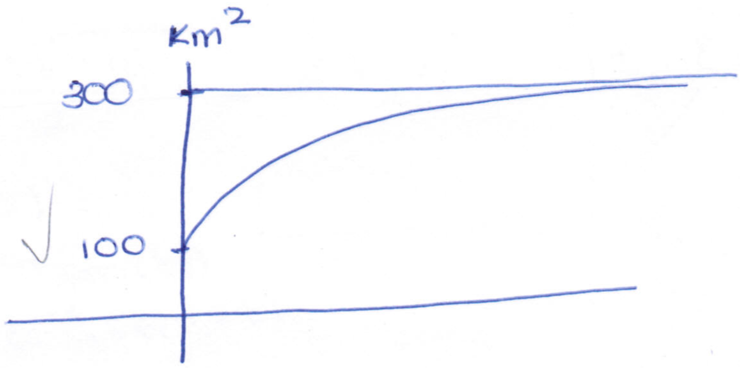
$x(0) = 100 = c + 300$

$100 - 300 = c \rightarrow c = -200$

$x(t) = -200 \cdot e^{-0'05t} + 300$

A largo plazo

$x_{eq} = \frac{15}{0'05} = 300 \ km^3$



Si a largo plazo $\rightarrow 500 km^2$

$500 = \frac{K}{0'05}$ $\qquad 500 \cdot 0'05 = K$

Debería de replantar $25 km^2$ al año

2.- En cierto circuito eléctrico, la intensidad $I(t)$ y la carga del condensador $Q(t)$ cumplen la ecuación diferencial

$$\begin{cases} I'(t) = -I(t) - 4Q(t) \\ Q'(t) = R\,I(t) - Q(t) \end{cases}$$

Suponer que $R = 1$ ohmio, y que inicialmente $I(0) = 2$, $Q(0) = 0$.

(a) Resuelve la ED.

(b) Esboza la gráfica de $Q(t)$ y determina la carga máxima que alcanza el condensador.

(c) ¿Cuánto debería valer R para que la carga del condensador no oscile? ¿Y para que oscile con el doble de frecuencia?

Nota: 3 puntos

2

a) BUSCO LOS AUTOVALORES DE A

$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 4 = 1+\lambda^2+2\lambda+4 \to \lambda^2+2\lambda+5$

$\lambda^2+2\lambda+5=0 \to \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2\pm4i}{2} = \boxed{-1\pm2i}$

AUTOVALORES COMPLEJOS

FORMULACION DE LA ED $\to$ $I(t) = ae^{-t}\cdot\cos(2t) + ce^{-t}\cdot sen(2t)$

$Q(t) = be^{-t}\cdot\cos(2t) + de^{-t}\cdot sen(2t)$

RESOLUCION DE LA ED $\to$ $I(0) = 2 = a$ $\quad a=2$

$Q(0) = 0 = b$ $\quad b=0$

$I'(0) = -2 = -2e^{-t}\cdot\cos(2t) - 4e^{-t}\cdot sen(2t) - ce^{-t}\cdot sen(2t) + 2ce^{-t}\cdot\cos(2t)$

$c=0$

$Q'(0) = 2 = -de^{-t} sen(2t) + 2de^{-t}\cdot\cos(2t) \to d=1$

$\boxed{ED \to \begin{array}{l} I(t) = 2e^{-t}\cos(2t) \\ Q(t) = e^{-t} sen(2t) \end{array}}$

b) CARGA MAXIMA DEL CONDENSADOR $\to$

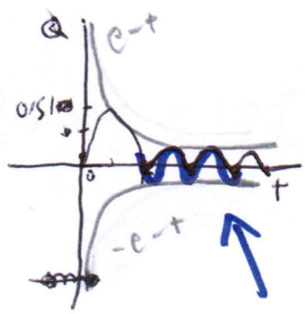
$Q'(t) = -e^{-t}\cdot sen(2t) + 2e^{-t}\cos(2t) = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{-t}\cos(2t) = e^{-t} sen(2t)$

$2 = \frac{sen(2t)}{\cos(2t)} \to 2 = \tan 2t$

$2t = \arctan 2$

$t = 0'553$



$\boxed{Q(0'553) = e^{-0'553}\cdot sen(1'107) = 0'513}$

c) busco R / $\sqrt{4-4\cdot(4\cdot R+1)}=0$

$4R+1=1$

$R=0$ ✓

busco R / $\dfrac{\sqrt{4-4(4R+1)}}{2}=4i$

$4(4R+1)=68$

$(4R+1)=17$

$R=4$ ✓

3.- Consideramos un fluido en $\mathbb{R}^2$ con campo de velocidades $\vec{\mathbf{v}} = (y, -x)$.

(a) Representa el campo $\vec{\mathbf{v}}$, y justifica si el fluido rota y/o se expande.

(b) Calcula la circulación de $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo de la circunferencia de centro el origen y radio $1/2$.

(c) Si la densidad del fluido es $\rho = 1/(1+r^4)$, calcula la energía cinética en el disco unidad D, dada por la integral $\frac{1}{2}\iint_D \rho\,|\vec{\mathbf{v}}|^2\,dx\,dy$.

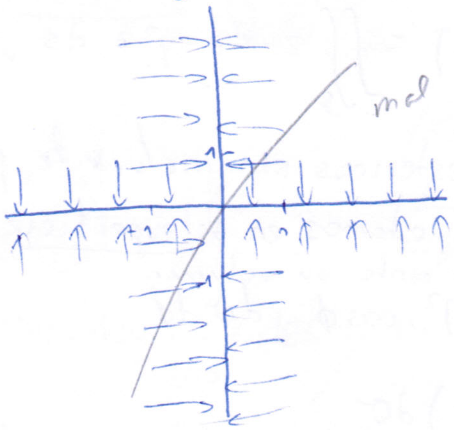
Nota: 2'4 puntos

2

a) Para ver si el fluido rota y/o se expande debemos calcular el rotacional y la divergencia de $\vec{v}$ y ver si son menor, igual o mayor que 0

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \rightarrow \text{ ni se expande ni se contrae}$$ ✓

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -1 - (+1) = -2 \rightarrow \text{ rota en sentido horario}$$ ✓



b) Tma. de Green

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_\Omega \operatorname{rot}\vec{F}\,dx\,dy = \iint_\Omega -2\,dx\,dy = -2\int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{1/2} r\,dr =$$

$$= -2\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1/2} = -2\cdot 2\pi\cdot 0{,}125 = -\pi/2$$ ✓

c) $\rho = 1/1+r^4 \qquad |\vec{v}|^2 = \left(\sqrt{y^2+(-x)^2}\right)^2 = y^2+x^2 = r^2$

Paso a Polares

$$\frac{1}{2}\iint_D \rho\cdot|\vec{v}|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint \frac{1}{1+r^4}\cdot r^2\cdot r\,d\sigma\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\int_0^1 \frac{r^3}{1+r^4}\,dr =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\left[\ln(1+r^4)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln 2 = \underline{1/4\,\pi\ln 2 \approx 0{,}54}$$

✓

4.- Considera la *superficie* S dada por el hemisferio superior de la esfera unidad.

(a) Calcula el flujo a través de S del campo $\vec{\mathbf{E}} = (1 - x^2 - y^2)\vec{\mathbf{k}}$.

(b) Calcula la integral de línea de $xy^2\,dx + dy + dz$ a lo largo de la circunferencia del ecuador.

Nota: 1'6 puntos

0'7

b)
$$\int xy^2\,dx + dy + dz = \int_0^{2\pi} -\cos t \cdot \operatorname{sen}^3 t\,dt + \cos t\,dt = \left[-\frac{\operatorname{sen}^4 t}{4} + \operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

a)
$$\text{Flujo} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} = \iint_S \underbrace{(1 - x^2 - y^2)}_{z^2}\,\vec{k} \cdot \vec{n}\ dA$$

$\vec{n} = (x, y, z)$

$$= \iint_S z^3\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\ \operatorname{sen}\varphi\ d\theta\,d\varphi$$

esféricas

$$= 2\pi\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi/2$$