Examen final de Matemáticas II (1^o Ing. Química) 17/6/2011

Nombre y dni: ....

1.- En una reacción química se tienen dos moléculas A y B que en presencia de una enzima se transforman una en otra y viceversa. Se sabe que cada minuto el 4% de A se transforma en B, el 1% de B se transforma en A, y además cada minuto se desintegran el 2% de A y el 3% de B. Por otro lado, se introducen a ritmo constante 2 gramos/min de sustancia A.

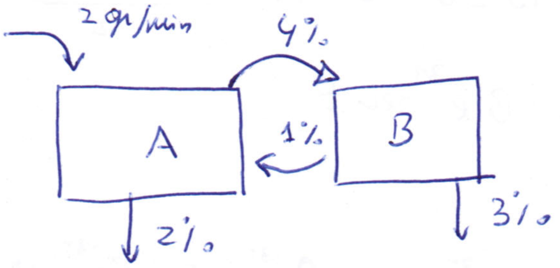
(a) Formula una ecuación diferencial para este problema.

(b) Determina las cantidades de sustancia A y B a largo plazo.

(c) Además de lo anterior, desearíamos extraer k gramos/min de sustancia B. ¿Por debajo de qué valor debería estar k para que la reacción no se extinga a largo plazo?

Nota: 2'5 puntos

a)



$A(t)$ = gr de A en tiempo t
$B(t)$ = gr de B en tiempo t

$$\begin{cases} A'(t) = -0'06\,A(t) + 0'01\,B(t) + 2 \\ B'(t) = 0'04\,A(t) - 0'04\,B(t) \end{cases}$$

b) A largo plazo $\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{eq} \\ B_{eq} \end{pmatrix} \leftarrow \boxed{\text{sol de equilibrio}}$

$$\begin{cases} 0 = -6A + B + 200 \\ 0 = 4A - 4B \longrightarrow A = B \end{cases} \longrightarrow 5A = 200 \Rightarrow \boxed{A_{eq} = B_{eq} = 40\text{ gr}}$$

c) Si extraemos k gr/min de B, las ecuaciones quedan

$$\begin{cases} A'(t) = -0'06\,A + 0'01\,B + 2 \\ B'(t) = 0'04\,A - 0'04\,B - k \end{cases}$$

A largo plazo $\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{eq} \\ B_{eq} \end{pmatrix}$, que tiene que ser $\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$ para que no se extinga la reacción. Hallamos (A_{eq}, B_{eq}):

$$\begin{cases} 0 = -6A + B + 200 \\ 0 = 4A - 4B - 100k \end{cases}$$

$$0 = -20A + 0 + 800 - 100k \Rightarrow A = \frac{-100k + 800}{20} = -5k + 40 > 0 \Rightarrow k < \frac{40}{5} = 8$$

$$B = 6A - 200 = -30k + 240 - 200 = 40 - 30k \Rightarrow \boxed{k < 4/3}$$

2.- La posición de un muelle viene dada por la ecuación diferencial

$$x''(t) + 6x'(t) + 10x(t) = 0.$$

Inicialmente está estirado en la posición $x(0) = 1$ cm, y lo comprimimos con velocidad -3 cm/s.

(a) Resuelve la ecuación diferencial y esboza la gráfica de la solución.

(b) Determina la compresión máxima que alcanza el muelle.

(c) ¿Hasta cuánto tendríamos que reducir el rozamiento para que la frecuencia de oscilación se duplicara?

Nota: 2'5 puntos

(a) Autovalores $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = -3 \pm i$

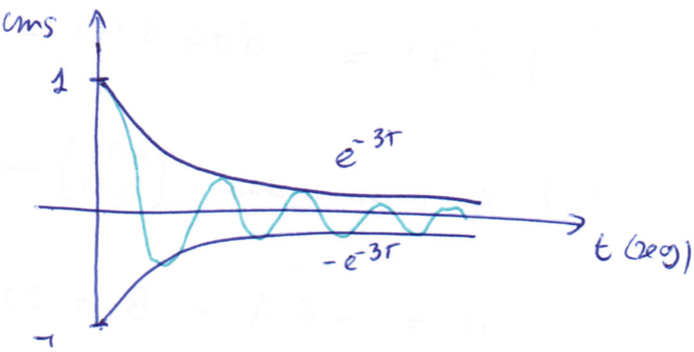
$\Rightarrow x(t) = A e^{-3t}\cos t + B e^{-3t} \operatorname{sen} t.$

$x(0) = 1 \longrightarrow \boxed{1 = A}$

$x'(0) = -3 \longrightarrow -3 = \left(-3e^{-3t}\cos t + e^{-3t}\operatorname{sen} t + 3Be^{-3t}\operatorname{sen} t + Be^{-3t}\cos t\right)\Big|_{t=0}$

$\Rightarrow -3 = -3 + B \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-3t}\cos t}$



(b) Busco $x'(t) = 0$

$\Rightarrow x'(t) = -3e^{-3t}\cos t + e^{-3t}\operatorname{sen} t = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} t = -3\cos t$

$\Rightarrow \tan t = -3 \Rightarrow t = \arctan(-3) + k\pi$ $\quad k = 1, 2, 3, \dots$

$\Rightarrow$ el primer mínimo es

$t = \operatorname{arct}(-3) + \pi = 1'89$ seg

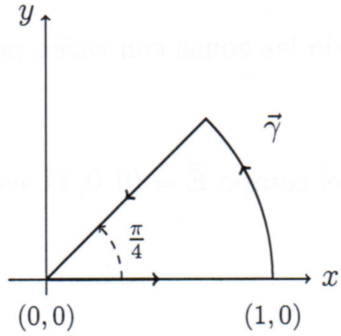
La posición es $x(1'89) = -0'316 \cdot e^{-3 \cdot 1'89} = 1'08 \cdot 10^{-3}$ cms

(c) Busco μ / $\frac{\sqrt{\mu^2 - 40}}{2} = 2\,\frac{\sqrt{36-40}}{2} = 2i$;

$\Rightarrow \mu^2 - 40 = -16 \Rightarrow \mu^2 = 40 - 16 = 24 \Rightarrow \mu = \sqrt{24} = \boxed{4'9}$

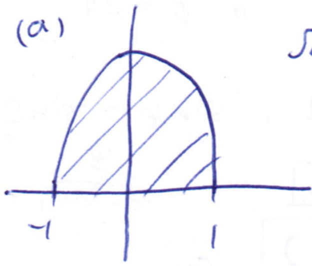
3.- (a) Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola $y = 1 - x^2$ y el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Determinar su masa si la densidad en cada punto es $\rho(x,y) = y/(1-x^2)$.

(b) Calcular la circulación del campo $\vec{\mathbf{v}} = (-y^3, x^3)$ a lo largo de la curva $\vec{\gamma}$ del dibujo



Nota: 2 puntos

(a)



$$\Omega = \{-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x^2\}$$

$$M_T = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{y}{1-x^2}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\cancel{2}}}{(1-\cancel{x^2})\cdot 2}\, dx = \cancel{2}\int_0^1 \frac{(1-x^2)}{\cancel{2}}\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2/3 \;//$$

(b)

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{\gamma}} -y^3\, dx + x^3\, dy \overset{\boxed{\text{Green}}}{=} \iint_{\Omega} (3y^2 + 3x^2)\, dx\, dy$$

$$= 3\int_0^1\int_0^{\pi/4} r^2 \cdot r\, d\theta\, dr = 3\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2} \;//$$

$\boxed{\text{polares}}$

$\boxed{\Omega = \{0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}}$

4.- Considera la *superficie* de la esfera unidad dada por

$$S = \{\, 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4},\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \,\},$$

y cuya densidad de carga viene dada por $\rho = \sin\varphi \sin\theta$.

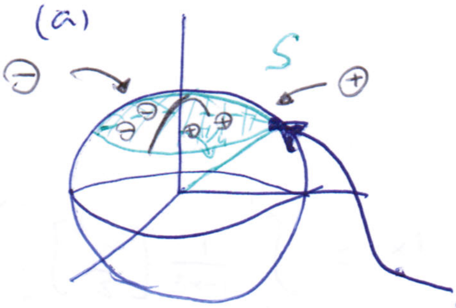
(a) Esboza la superficie S, indicando las zonas con carga positiva y negativa. ¿En qué puntos es la carga máxima?

(b) Calcula la carga total de S

(c) Calcula el flujo a través de S del campo $\vec{\mathbf{E}} = (0, 0, 1)$, es decir $\iint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$.

Nota: 2 puntos

(a)



$$\rho = \sin\varphi \sin\theta \quad \begin{cases} \oplus \text{ en } 0 \leq \theta \leq \pi \\ \ominus \text{ en } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Es máximo si $\sin\theta = 1$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Downarrow$ $\boxed{\theta = \pi/2}$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\boxed{\varphi = \pi/4}$

$\boxed{\text{pto carga max} = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ $\qquad$ $\boxed{\text{carga max} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(b)

$$Q_T = \iint_S \rho \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin\theta \cdot \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi \, d\varphi \right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \right)}_{0} = 0$$

$\boxed{\text{se ve por simetría}}$

(c)

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} = \iint_S z \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$\vec{n} = (x, y, z)$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2\varphi)}{2} \, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \pi/2$$

5.- ¿Verdadero o falso? (justificar)

(a) $\vec{\mathbf{v}} = (z, y, x)$ es un campo gradiente

(b) para todo campo $\vec{\mathbf{F}}$ se tiene rot (rot $\vec{\mathbf{F}}$) $= \vec{\mathbf{0}}$

(c) existe un campo $\vec{\mathbf{A}}$ tal que $(x, y, z) =$ rot $\vec{\mathbf{A}}$.

Nota: 1 punto

(a) Por un Tma de clase, basta ver que $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & y & x \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \exists\, h \,/\, \vec{v} = \nabla h$$

(de hecho se ve a ojo que $h = xz + \frac{y^2}{2} + C$)

Verdadero

(b) Es falso: Tomar por ejemplo $\vec{F} = (z^2, 0, 0)$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2z\,\vec{j}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{rot}(2z\,\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 2z & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} \;\lightning$$

(c) Por un Tma de clase,

$$\exists\, \vec{A} \,/\, \vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{A}) \iff \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

En nuestro caso $\vec{F} = (x, y, z)$ tiene $\operatorname{div} \vec{F} = 3 \neq 0$

$$\Rightarrow \nexists\, \vec{A} : (x, y, z) = \operatorname{rot} \vec{A}$$

FALSO