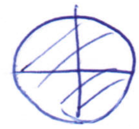
MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química   Test 5, 4/5/2011

Nombre:

. . . .

1.- Hallar la masa de una placa circular de centro el origen y radio 1 cuya densidad viene dada por $\rho(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^3$.

$M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$ donde $D :=$ disco radio 1



$$= \int_0^2 (1+r^2)^3 \cdot 2\pi r\,dr = \pi \int_0^2 (1+r^2)^3 \cdot 2r\,dr$$

$$= \pi \left.\frac{(1+r^2)^4}{4}\right]_0^2 = \pi\,\frac{2^4-1}{4} = \frac{\pi 15}{4} \,/\!/$$

2.- Considerar el campo de vectores $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y + x)\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$.

a) Hallar rot $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, y el trabajo realizado $\oint_\Gamma \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ para mover una partícula por el triángulo Γ de vértices $(0, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$ (en sentido antihorario).

b) Hallar div $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, y el flujo saliente $\oint_\Gamma \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ a través del triángulo anterior.

(a) $\text{rot}\,\vec{F} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 + (-1) = -2 \,/\!/$

$$W = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{Green}}{=} \iint_T (-P_y + Q_x)\,dx\,dy = \iint_T (-2)\,dx\,dy$$

$\frac{b \cdot h}{2}$

$$= -2 \cdot \text{Área}(T) = (-2)\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = -1 \,/\!/$$

(b) $\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 1 = 2 \,/\!/$

$$\Phi = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{n} \overset{\text{Green 2}}{=} \iint_T \text{div}\,\vec{F} = \iint_T 2\,dx\,dy = 2\cdot\text{Área}(T) = 1 \,/\!/$$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{el fluido se expande y rota en sentido horario.}}$

MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química Test 5, 4/5/2011

Nombre:

....

1.- Hallar la masa de una placa triangular con vértices $(0,0),(1,0)$ y $(1,1)$, cuya densidad es $\rho(x,y)=(x+y)^2$.

$$T \to \left.\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x \end{array}\right\}$$

$$M=\int_0^1\left(\int_0^x (x+y)^2\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\frac{(2x)^3-x^3}{3}\,dx=$$

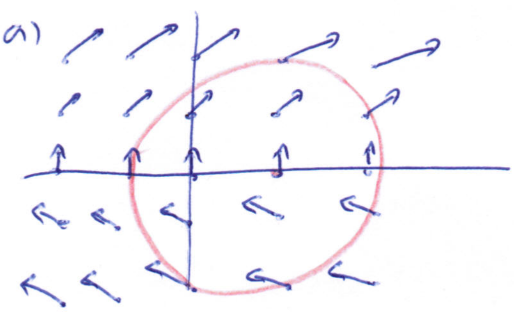
$$=\int_0^1\frac{7}{3}x^3\,dx=\frac{7}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{7}{12}\ //.$$

2.- Considerar el campo de vectores $\vec{\mathbf{v}}=(2y,1)$

a) Esboza el campo, calcula rot $\vec{\mathbf{v}}$ y div $\vec{\mathbf{v}}$, ~~y determina las líneas de flujo~~.

b) Calcula la integral de línea $\oint_C \vec{\mathbf{v}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}$, donde C es la circunferencia de centro (1,0) y radio 2 (en sentido antihorario).

a)



$$\text{rot}\,\vec{v}=-P_y+Q_x=-2\ //$$

↳ rota en sentido horario

$$\text{div}\,\vec{v}=P_x+Q_y=0$$

↳ el fluido ni se expande ni se comprime.

(b) $$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r}\overset{\text{Green}}{=}\iint_{D_2}\text{rot}\,\vec{v}\,dx\,dy=\iint_{D_2}-2=-2\,\text{Área}(D_2)$$

$$=-2\cdot\pi 2^2=-8\pi\ /$$

↳ el fluido rota en sentido horario