MATEMÁTICAS II   1º de grado en Ingeniería Química

TEMA 1: ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Una población de bacterias se duplica cada 6 horas. Si inicialmente hay mil individuos, ¿cuántos habrá al cabo de t horas? ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

2. De cierto material radioactivo se sabe que se desintegra un 20% cada año. ¿Qué porcentaje del material inicial quedará al cabo de 2 años? ¿Cuántos años tardará en desintegrarse un 80% del material inicial?

3. El C_{14} tiene una semivida de 5730 años. En una reciente excavación se ha hallado un hueso fosilizado cuyo contenido en C_{14} es de sólo un 1% respecto a la cantidad que se encuentra en un hueso similar de un ser vivo. Determina la edad del fósil.

4. Una muestra de uranita contiene 124 mgr de ^{206}Pb por cada gramo de ^{238}U. Si la semivida de éste es $4'59 \cdot 10^9$ años, ¿cuánto tiempo ha transcurrido desde la formación geológica del material?

5. La proporción de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye un tanto por cierto fijo por cada kilómetro que subimos.

   a) Para el oxígeno, la proporción disminuye un 7% por kilómetro. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar?

   b) Responder a la misma pregunta para el hidrógeno, que disminuye un 0’6% por km.

   c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400.000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?

6. Resolver las ecuaciones diferenciales

   a) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{tx}{1+t^2}$ con $x(0) = 1$ *b)* $\dfrac{dx}{dt} + 3t^2x^2 = 0$ con $x(1) = 1/2$.

   c) $\dfrac{dx}{dt} = (1+\cos t)(10x - x^2)$ con $x(0) = 1$ *d)* $\dfrac{dx}{dt} = -x^2 + 4$ con $x(0) = 1$.

7. Tenemos un recipiente relleno con 1 litro de argón a una presión de 4 atmósferas. Al comprimir lentamente el gas con un pistón, la relación entre el volumen V del recipiente y su presión P viene dada por la ecuación $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{5P}{3V}$.

   a) Calcula P como función de V.

   b) ¿Cuál es la presión cuando el volumen es 1/2 litro?

   c) ¿Hasta qué volumen debemos comprimirlo para que la presión sea de 25 atmósferas?

8. La evolución de una población de bacterias (en millones) viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 0'2x(5-x),$$

   con t = tiempo en días. Si inicialmente hay un millón de bacterias:

   a) Calcula el número de bacterias tras uno y dos días.

   b) Calcula el número de bacterias a largo plazo.

   c) ¿En qué momento la población será de 4 millones?

9. Se está estudiando una especie de cabra montesa. Inicialmente se cuenta con 500 ejemplares, y se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales la población crece un 6% cada año. Para evitar un desequilibrio ecológico en la zona se consideran dos planes.

   (a) Plan A: permitir la caza de 10 ejemplares de cabra al final de cada año.

   (b) Plan B: permitir que se cace un 2% de la población total de cabras al final de cada año.

   Calcular cuál sería la población aproximada al cabo de 15 años con cada uno de los planes.

10. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. Se comienza a sacar líquido del tanque a razón de 3 litros por minuto. Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden al tanque 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro.

    a) Hallar la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo.

    b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

    c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

11. Un paciente hospitalizado recibe mediante un gotero 200 miligramos diarios de cierto medicamento. Se sabe que cada día el cuerpo elimina de manera natural una quinta parte del medicamento en la sangre.

    a) Calcular la cantidad de medicamento en el organismo al cabo de 3 días.

    b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

    c) ¿Qué dosis diaria habría que aplicar si queremos que a largo plazo haya 1500 mgr de medicamento en la sangre?

12. La velocidad (en m/seg) de un cuerpo en caída libre viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - Cv^2$$

    donde $g = 9'8$ y C el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el aire.

    a) Un hombre con el paracaídas cerrado tiene $C = 0'001$, y abierto $C = 0'5$. Sin resolver la ecuación, calcular la velocidad a largo plazo en ambos casos.

    b) En el caso del paracaídas cerrado, ¿Cuánto tiempo pasa desde que se tira del avión hasta que alcanza la velocidad de 100 m/s? ¿Y el caso del paracaídas abierto?

    c) En ambos casos dibuja la gráfica de v con respecto a t (no es necesario resolver la ED).

13. En cierto experimento químico se tienen dos compuestos P y Q, cuya combinación da lugar a un nuevo compuesto X, es decir $P + Q \to X$. Inicialmente se tienen p moles de P, q moles de Q y ninguno de X. Nos dicen que $x(t)$ = moles de X en tiempo t, evoluciona según la ecuación

$$x'(t) = k\big(p - x(t)\big)\big(q - x(t)\big).$$

    (a) Explica por qué este modelo es razonable. Justifica cuántas moléculas de X habrá a largo plazo, y esboza la gráfica de $x(t)$ (no es necesario resolver la ecuación).

    (b) Resuelve la ecuación con $k = \frac{1}{2}$, $p = 1$ y $q = 3$. ¿Cuándo será la cantidad de X mayor que la de P?

    (c) Suponer que se modifica la reacción de modo que disminuye progresivamente la velocidad de crecimiento de X, quedando la ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = 0'5(1 - x)(3 - x) - 0'25t.$$

    Tomando $x(0) = 0$, estimar numéricamente la concentración de X en tiempo $t = 2$ (por ejemplo usando el método de Euler con paso $h = 0'5$).

14. Una población de peces, inicialmente con mil individuos y afectada por un factor de pesca estacional, evoluciona según la ecuación diferencial

$$x'(t) = 0'2x(5 - x) + \operatorname{sen}(\pi t)$$

donde $x(t)$ = número de individuos (en miles) tras t meses. Representa gráficamente $x(t)$ durante el primer año con la ayuda de un ordenador.

15. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

a) $x'(t) = x(t) + 2te^{2t}$ con $x(0) = 1$	*b)* $x'(t) + x(t) = te^{-t} + 1$
c) $tx'(t) + 2x(t) = \sin t$ con $x(\frac{\pi}{2}) = 0$	*d)* $x'(t) = -\frac{3}{t}x(t) + \sqrt{t}$

16. En una reacción química de la forma $3A \to X$ la concentración del reactivo A cumple

$$A'(t) = -3kA(t)^3.$$

Experimentalmente se observa que para $A(0) = 0'5$ la concentración baja a $0'1$ al cabo de 32 minutos.

(a) Resuelve la ED, determina el valor de k, y esboza la gráfica de $A(t)$.

(b) Con el mismo k, si tomamos $A(0) = 1$, ¿cuánto tardaría en bajar la concentración a 0'1?

17. En una reacción química reversible $A \rightleftarrows X$, la concentración de A cumple

$$A'(t) = -k_1A(t) \; + \; k_2\big(A(0) - A(t)\big),$$

(a) Se observa que a largo plazo la cantidad de reactivo A se reduce a una cuarta parte del inicial. ¿Qué relación debe haber entre k_1 y k_2?

(b) Determina k_1 y k_2 si se observa además que, tras un cuarto de hora, la concentración de A es la mitad de la inicial.

(c) En otro experimento se añade periódicamente cierta cantidad de reactivo A, de modo que se cumple la ecuación

$$A'(t) = 2 - 4A(t) + \sin t \qquad \text{con} \;\; A(0) = 1.$$

Determinar la cantidad de reactivo A en tiempo t. ¿Entre qué valores oscilará la concentración a largo plazo?

18. Un depósito de 500 m^3 de capacidad contiene 100 m^3 de agua pura. A partir del instante $t = 0$ entra en el depósito una disolución de alcohol en agua al 50% a razón de 2 m^3 por minuto, y sale la disolución, supuesta homogénea, a razón de 1 m^3 por minuto.

(a) Determinar el volumen de la disolución en tiempo t. ¿Cuándo se llenará el depósito?

(b) Determinar la cantidad de alcohol en el depósito en tiempo t. ¿Qué concentración tendrá la disolución cuando se llene el depósito?

19. El ^{226}Ra se desintegra en ^{210}Pb con semivida 1600 años, y éste en otros compuestos con semivida 22 años, cumpliéndose las ecuaciones diferenciales

$$R'(t) = -r_1R(t) \qquad\qquad P'(t) = r_1R(t) - r_2P(t).$$

(a) Calcula la proporción P/R en tiempo t, y determina cuál es la proporción de equilibrio a largo plazo. Si $P(0) = 0$, ¿al cabo de cuánto tiempo se alcanza el 95% de la proporción de equilibrio?

(b) En el albayalde (un compuesto de plomo utilizado en pintura) la proporción $P(0)/R(0)$ depende de la pureza del material, pero se sabe que a lo sumo podría ser de 100. En un cuadro localizado en los años 40, presuntamente de Vermeer, se midió una proporción $P(t)/R(t) \approx 0'15$. ¿Es posible que este cuadro tuviera 300 años?

20. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas

a)	$y'(x) = \dfrac{x+2y}{y-2x}$ con $y(0)=2$	*b*)	$(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$
c)	$xdy + 2ydx = 0$ con $y(1) = 1$	*d*)	$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

Nota: En (c,d) buscar un factor integrante $\mu = \mu(x)$.

21. Experimentalmente se observa que la temperatura T de una masa gaseosa cumple

$$dT \;=\; V\,dP + \left(P - aV^{-2}\right) dV.$$

Hallar $T(P,V)$, sabiendo que para $P = 1$ y $V = 1$ se tiene $T = 1 + a$.

22. Experimentalmente se observa que

$$\frac{dV}{V} \;=\; aT^2\,dT \;-\; bP^{-1}\,dP.$$

Hallar la ecuación de estado del gas $V = V(T,P)$.