MATEMÁTICAS II **1º de grado en Ingeniería Química**

HOJA 3: Integrales de funciones de 2 variables

1. Calcular las siguientes integrales dobles*

$$a)\ \iint_R (x+y)^2\,dxdy \qquad b)\ \iint_{[0,1]\times[0,3]} ye^{-xy}\,dxdy \qquad c)\ \iint_R \sin\big(\pi(x+y)\big)\,dxdy$$

$$d)\ \iint_T (1-x)y\,dxdy \qquad e)\ \int_0^2\int_{x^2}^{e^{x^2}} xy\,dydx \qquad f)\ \iint_D x\,dxdy$$

2. Calcula la integral de $f(x,y)=2-x^2-y^2$ sobre las regiones R, T y D, esbozando en cada caso a qué volumen corresponde la integral.

3. Calcula las integrales sobre el disco unidad D de las siguientes funciones radiales, esbozando los volúmenes de las gráficas correspondientes

$$a)\ 1-(x^2+y^2) \qquad b)\ 1-\sqrt{x^2+y^2} \qquad c)\ e^{-x^2-y^2} \qquad d)\ (x^2+y^2)e^{-4(x^2+y^2)}$$

4. (a) Hallar la masa de una placa rectangular con vértices $(0,0),(2,0),(0,1),(2,1)$ y cuya densidad viene dada por la función $\rho(x,y)=xe^{-2xy}$.

   (b) Hallar la carga total de una placa circular situada en el disco de centro el origen y radio 3, y cuya densidad de carga viene dada por la función $\rho(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$.

   (c) Hallar la temperatura media de una placa triangular con vértices (0,0), (1,3), (2,2) sabiendo que $T(x,y)=32d^2$, donde d es la distancia de (x,y) al origen.

5. Calcula el volumen de un granero de base rectangular 6×12, y paredes verticales de altura 9 al frente (que está del lado que mide 6) y 12 detrás.

6. (a) Calcula el volumen del tetraedro generado por los vectores $\vec{\mathbf{i}}$, $2\vec{\mathbf{j}}$, $3\vec{\mathbf{k}}$.

   (b) Calcula el volumen de una pirámide de base rectangular 6×12 y de altura 9.

7. Consideramos los siguientes campos de vectores

$$\vec{\mathbf{v_1}}=(2x,-2y), \qquad \vec{\mathbf{v_2}}=(1,2x), \qquad \vec{\mathbf{v_3}}=(x,2y), \qquad \vec{\mathbf{v_4}}=\left(-\tfrac{y}{x^2+y^2},\tfrac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

   (a) Esbozar los campos de vectores

   (b) Calcular la divergencia y el rotacional de cada uno de ellos

   (c) Determinar las líneas de flujo de los campos, esbozando las trayectorias.

8. Consideramos las siguientes curvas para $t\in[0,1]$:

$$\vec{\gamma}_1(t)=\big(3\cos(2\pi t),3\sin(2\pi t)\big), \qquad \vec{\gamma}_2(t)=\big(e^{2t},e^{-2t}\big), \qquad \vec{\gamma}_3(t)=\big(2\pi t-\sin(2\pi t),1-\cos(2\pi t)\big).$$

   (a) Esboza las trayectorias de las curvas

   (b) Calcula la velocidad y la aceleración cuando $t=1$

   (c) Calcula la longitud de las curvas $\vec{\gamma}_1$ y $\vec{\gamma}_3$.

   (d) Si $\vec{\gamma}_1$ y $\vec{\gamma}_2$ se escapan por la tangente cuando $t=1$, hallar la posición tras un segundo.

---

* En este ejercicio, y en los siguientes denotamos

$R=[0,1]\times[0,1]$ $\qquad$ $D=$ disco unidad $=\{x^2+y^2\le 1\}$.

$T=$ interior del triángulo de vértices $(0,0),(0,1),(1,1)$.

9. Hallar las siguientes integrales de línea, donde ∂D es la circunferencia unidad (en sentido antihorario)

$$a)\ \oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy \qquad b)\ \oint_{\partial D} 2x\,dx + 3y\,dy \qquad c)\ \oint_{\partial D} x^2\,dx + 2xy\,dy$$

10. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{\mathbf{F}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}$ para mover una partícula a lo largo de las siguientes curvas

$$a)\ (\cos^3 t, \sin^3 t),\ t \in [0, 2\pi] \qquad b)\ (t, t),\ t \in [0, 1] \qquad c)\ (t, t^2),\ \ t \in [0, 1]$$

11. Calcula la circulación $\oint_C \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ del campo $\vec{\mathbf{V}} = -y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}}$ para las siguientes curvas C (en sentido antihorario)

   (a) la circunferencia de centro el origen y radio R

   (b) el cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$

   (c) el rombo con vértices $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

12. Un mol de gas ideal se halla inicialmente a temperatura 350º K y presión 2 atm, y experimenta una transformación que lo lleva a aumentar en 10º K su temperatura y en 2 atm su presión. Obtener la variación de volumen que se produce en esta transformación calculando sobre un camino apropiado la integral

$$\int_\gamma dV = \int_\gamma \frac{r}{P}\,dT - \frac{rT}{P^2}\,dP.$$

13. Experimentalmente se observa que la temperatura T de cierta masa gaseosa cumple

$$dT = V\,dP + \left(P - aV^{-2}\right) dV.$$

   Hallar la variación de temperatura necesaria para pasar de $P = 1$, $V = 1$ a $P = 3$, $V = 2$.

14. Utiliza el teorema de Green para calcular las siguientes integrales

$$a)\ \oint_{\partial D} -y^3\,dx + x^3\,dy \qquad b)\ \oint_{\partial R} \cos y\,dx + x \sin y\,dy \qquad c)\ \oint_{\partial T} x\,dy - y\,dx$$

15. El teorema de Green puede también escribirse como

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \iint_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}}\,,$$

   donde la primera integral representa el flujo neto del campo $\vec{\mathbf{E}}$ a través de $\partial\Omega$. Esboza los siguientes campos y utiliza la fórmula anterior para calcular los flujos correspondientes

   (a) $\vec{\mathbf{E}} = x\vec{\mathbf{i}} + y^3\vec{\mathbf{j}}$ a través del cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$

   (b) $\vec{\mathbf{v}} = 3x\vec{\mathbf{i}} - 2y\vec{\mathbf{j}}$ a través de la circuferencia unidad

   (c) $\vec{\mathbf{B}} = x\vec{\mathbf{i}} + 2x\vec{\mathbf{j}}$ a través de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

16. La ley de Fourier establece que la variación de temperatura por unidad de tiempo en un recinto Ω debe coindicir con el flujo neto de $-\nabla T$ a través de $\partial\Omega$. Suponer que $T(x, y) = 4 - 2x^2 - 4y^2$.

   (a) Esboza las curvas de nivel $c = 0, 2, 4$, y la dirección del campo $-\nabla T$ en la que fluye el calor

   (b) Calcula la variación de temperatura por unidad de tiempo en el disco unidad unidad.

17. Repite el ejercicio anterior tomando $T(x, y) = 4 - 2x^2 + 4y^2$ (en este caso esboza las curvas de nivel para $c = 0, 2, 4, 6, 8$)