MATEMÁTICAS II $\qquad$ 1º de grado en Ingeniería Química

HOJA 4: Integrales de funciones en $\mathbb{R}^3$

1. Calcular las siguientes integrales triples, esbozando las regiones de integración *

$$a) \iiint_R (1 + xyz)\, dxdydz \qquad b) \iiint_{[1,3]\times[0,1]\times[0,2]} (xy + 2yz)\, dxdydz$$

$$c) \int_0^1 \int_x^1 \int_0^y (1 + z^2)\, dzdydx \qquad d) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} dzdydx$$

2. Calcula los volúmenes de las siguientes regiones, esbozando sus gráficas

   (a) la región $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 4, \;\; 0 \leq z \leq 4 - x - y\}$

   (b) la región comprendida entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) la porción de la bola unidad B que está por encima del plano $z = 1/2$.

3. Calcula la masa de los siguientes cuerpos, esbozándo sus gráficas y zonas más densas

   (a) bola de radio 3 con densidad $\rho = e^{-r}$, donde r es la distancia al centro.

   (b) porción de la bola unidad con $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ y densidad $\rho = \cos\phi$.

   (c) cuña esférica con $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y densidad $\rho = r(1 - r)\sin\theta$.

4. La densidad de la atmósfera terrestre es aproximadamente $\rho(h) = 1.2\, e^{-0.116\, h}$ (en kg/m^3) donde h es la altura (en kms) sobre la superficie del planeta. Calcular la masa total de la atmósfera suponiendo que la tierra es una esfera de radio 6370 kms, y que la atmósfera llega hasta los 10.000 kms.

5. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del *centro de masas* de un cuerpo Ω vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x\, \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

   (y análogamente para $\bar{y}, \bar{z}$). Calcula el centro de masas de los cuerpos (b) y (c) del ejercicio 3.

6. El *momento de inercia* de un cuerpo Ω mide su resistencia a girar alrededor de un eje. Para el eje Z, viene dado por

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

   Suponiendo $\rho \equiv 1$, probar que los momentos de inercia del cilindro y la bola de radio R son respectivamente $\frac{1}{2}MR^2$ y $\frac{2}{5}MR^2$. Si tienen la misma masa, ¿cuál de los dos caerá más rápido al dejarlos rodar por una rampa?

---

* En este ejercicio y los que siguen denotamos

$R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], \qquad B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} =$ bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

7. Calcular las siguientes integrales de línea

$$a) \int_{\vec{\gamma}_1} x\,dx + y\,dy + z\,dz \qquad\qquad b) \int_{\vec{\gamma}_2} y\,dx + 2x\,dy + y\,dz\,,$$

donde $\vec{\gamma}_1(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2)$ y $\vec{\gamma}_2(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$. ¿Es alguna de las formas diferenciales exacta?

8. Hallar el trabajo realizado por los campos

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_1 = (x, y, z)\ , \qquad\qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_2 = (-y, x, z)$$

para mover una partícula desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 2)$

(a) en línea recta

(b) a lo largo de la hélice $\vec{\gamma}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$.

¿Es alguno de los campos conservativo?

9. Hallar div y rot de los siguientes campos en $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_1 = (x, xy, 1)\ , \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_2 = (-y, x, z)\ , \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_3 = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{|\vec{\mathbf{x}}|^3} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

10. Determinar si alguno de los siguientes campos se puede escribir como $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \nabla h$, hallando en su caso la función $h(x, y, z)$

$$a)\,\overrightarrow{\mathbf{F}} = (-y, x, z) \quad b)\,\overrightarrow{\mathbf{F}} = (yz, xz, xy) \quad c)\,\overrightarrow{\mathbf{F}} = (xy, yz, xz) \quad d)\,\overrightarrow{\mathbf{F}} = (3x^2y, x^3 + y^3, z)$$

11. Determinar si alguno de los campos siguientes se puede escribir como $\overrightarrow{\mathbf{F}} =$rot $\overrightarrow{\mathbf{A}}$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_1 = (x, y, z), \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_2 = (0, 0, xy), \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_3 = (yz, xz, xy)$$

En el caso de $\overrightarrow{\mathbf{F}}_2$, hallar el campo $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. *Sugerencia:* probar con $\overrightarrow{\mathbf{A}} = \big(A_1(x, y), 0, 0\big)$.

12. ¿Verdadero o falso? (justificar)

(a) rot $(\nabla h) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, para toda función $h(x, y, z)$

(b) rot (rot $\overrightarrow{\mathbf{F}}$) $= \overrightarrow{\mathbf{0}}$, para todo campo $\overrightarrow{\mathbf{F}}$

(c) div $(\nabla h) = 0$, para toda función h

(d) div (rot $\overrightarrow{\mathbf{F}}$) $= \overrightarrow{\mathbf{0}}$, para todo campo $\overrightarrow{\mathbf{F}}$

13. La *regla del producto* para div y rot dice

$$\text{div}\,(f\overrightarrow{\mathbf{F}}) = f\,\text{div}\,(\overrightarrow{\mathbf{F}}) + \big(\nabla f\big)\cdot\overrightarrow{\mathbf{F}}, \qquad\qquad \text{rot}\,(f\overrightarrow{\mathbf{F}}) = f\,\text{rot}\,\overrightarrow{\mathbf{F}} + (\nabla f)\times\overrightarrow{\mathbf{F}}.$$

Utilizar esta regla para calcular la divergencia y el rotacional del campo $\overrightarrow{\mathbf{G}} = |\vec{\mathbf{x}}|\,\vec{\mathbf{x}}$.

14. Calcular las siguientes integrales de superficie [†]

$$a) \iint_S (x^2+y^2)\,dA \qquad b) \iint_C (x^2+z^2)\,dA \qquad c) \iint_P 1\,dA$$

15. Una rampa de caracol define una superficie H que se parametriza con $(r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, donde $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$. Calcular $\iint_H \sqrt{x^2+y^2}\,dA$.

16. Hallar la carga total de la semiesfera superior si su densidad de carga es $\rho(x,y,z) = 1 - z^2$.

17. Hallar el centro de gravedad del *primer octante* de la esfera $S_+ = \{x^2+y^2+z^2 = 1 \mid x,y,z > 0\}$, es decir

$$m_x = \frac{1}{A(S_+)} \iint_{S_+} x\,dA, \qquad m_y = \frac{1}{A(S_+)} \iint_{S_+} y\,dA, \qquad m_z = \frac{1}{A(S_+)} \iint_{S_+} z\,dA$$

18. Suponer que la tierra es una esfera de radio 6370 kms.

    (a) Hallar la superficie que cubre la región polar ártica, situada al norte del paralelo 66.5°.

    (b) Hallar la superficie aproximada del estado norteamericano de Wyoming, delimitado por los paralelos 41 y 45, y los meridianos 104 y 111.

19. Si $\vec{\mathbf{E}} = (x,y,z)$, hallar el flujo total saliente $\iint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ para las superficies

    (a) la esfera unidad

    (b) el cilindro vertical con tapa inferior en $z = 0$ y tapa superior en $z = 2$

    (c) el tetraedro de vértices $\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$.

20. Hallar el flujo total de rayos UVA a través de la semiesfera superior

    (a) si los rayos inciden según el campo $\vec{\mathbf{v}} = (0,0,-1)$

    (b) si los rayos inciden con campo $\vec{\mathbf{v}}$ de módulo 1, pero con inclinación 45°.

21. Un fluído sube por una tubería vertical de radio 1 con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (1 - x^2 - y^2)\,\vec{\mathbf{k}}$.

    (a) Esbozar el campo $\vec{\mathbf{v}}$. ¿Por dónde circula más rápido el fluído?

    (b) Se coloca un filtro poroso en la tubería en forma de semiesfera superior. Determina el flujo neto de fluído a través del filtro.

22. Utiliza el teorema de Gauss para calcular los flujos netos de los siguientes campos

    (a) (x^3, y^3, z^3) a través de la esfera unidad

    (b) $(-y, x, z)$ a través de la esfera de radio R

    (c) (x^2, y^2, z^2) a través de la superficie del cuadrado $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

23. Utiliza el teorema de Stokes para calcular las integrales de línea de los campos

    (a) $(2z, -x, 3y)$ a lo largo del triángulo de vértices $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$.

    (b) $(-y, x, z)$ a lo largo del paralelo $\phi = \frac{\pi}{3}$ en la esfera unidad.

24. Tenemos una carpa en forma de paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ situada sobre el plano $z = 0$. El calor escapa a través de la superficie de la carpa según el campo de velocidades $\vec{\mathbf{v}} = \text{rot}\,(-y, x, 0)$. Usar el teorema de Stokes para calcular el flujo neto de calor a través de la superficie de la carpa.

[†] En este ejercicio S, C y P denotan las superficies de la esfera, el cilindro y el paraboloide:
$S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $\qquad C = \{x^2+y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$, $\qquad P = \{z = x^2+y^2,\ (x,y) \in D\}$.