MATEMÁTICAS II 1º de grado en Ingeniería Química

Práctica 1: Ejercicios sugeridos para practicar con Excel

1. La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ se obtiene de la recurrencia

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

con datos iniciales $A_1 = A_2 = 1$. Fue introducida en el siglo XI como un modelo sencillo para el crecimiento mensual en una población de conejos.

(i) Utiliza Excel para calcular los primeros 30 términos, dibujando su gráfica. ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

(ii) Determina el porcentaje de crecimiento de esta población a largo plazo. Para ello debes calcular con Excel A_n/A_{n-1}, y ver qué ocurre para n grande.

2. En una ciudad, la población de palomas urbanas pierde una cuarta parte de los individuos cada año. Para compensar la caída, el ayuntamiento suelta 200 nuevos ejemplares al final de cada año. Si $x(n)$ =número de palomas a principios del año n, se cumple la recurrencia

$$x(n+1) = \frac{3}{4}x(n) + 200$$

Si $x(0) = 1000$, usar Excel para determinar el número de palomas en los próximos 30 años, esbozando la gráfica. ¿Cuál será el número de palomas a largo plazo?

3. La población mundial en 1975 era de unos 4 mil millones de habitantes. Varios estudios consideran que la población del planeta cumpliría aproximadamente la ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = 0'036\, p(t) - 0'0033\, p(t)^2$$

donde $p(t)$ es el número de individuos (en miles de millones).

(a) Utiliza Excel para estimar la población desde 1975 hasta 2150, esbozando la gráfica. Para ello puedes usar la recurrencia

$$p(n+1) = p(n) \, + \, 0'036\, p(n) - 0'0033\, p(n)^2$$

(b) ¿Cuál sería la capacidad máxima de la población? ¿Cuándo se alcanzaría el 90% de dicha capacidad máxima?

Nota: puedes contrastar estas predicciones con los datos de 1985, 1995 y 2005, que han sido respectivamente de $4'8$, $5'7$ y $6'5$ mil millones de habitantes.

4. Ejerc 13c: Resolver numéricamente la ED

$$\frac{dx}{dt} = 0'5(1-x)(3-x) - 0'25t, \quad \text{con } x(0) = 0$$

usando el método de Euler con pasos $h = 0'5$ y $h = 0'1$, y esbozando las gráficas de las soluciones para $t \in [0, 10]$. Debes introducir la recurrencia

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{y} \quad x_{n+1} = x_n + h\big[0'5(1-x_n)(3-x_n) - 0'25t\big].$$

¿Cuándo es máxima la concentración de X? ¿Cuándo se termina la reacción?

5. Ejerc 14: Resolver numéricamente para $0 \leq t \leq 12$ la ED

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \mathrm{sen}(\pi t), \quad \text{con } x(0) = 1,$$

usando el método de Euler con $h = 0'1$. ¿Qué comportamiento observas a largo plazo?

6. *Reacciones reversibles* (ejemplo de [Petrucci, cap 16]).
Consideramos la reacción $CO + 2H_2 \rightleftarrows CH_3OH$, que se modeliza con la ED

$$x'(t) \;=\; k_1\, A(t)\, B(t)^2 \;-\; k_2 x(t)$$

junto con las identidades $A(t) + x(t) \equiv A(0) + x(0)$ y $B(t) + 2x(t) \equiv B(0) + 2x(0)$.
Sabiendo que $k_1 = 14'5$ y $k_2 = 1$ (a 200 °C), dibuja las gráficas de $\big(A(t), B(t), x(t)\big)$ y calcula las concentraciones de equilibrio, partiendo de cada una de las concentraciones iniciales

$$(0'1, 0'1, 0) \qquad (0, 0, 0'1) \qquad (0'1, 0'1, 0'1).$$

Nota: debes plantear las recurrencias (digamos con $h = 0'1$)

$$A_{n+1} = A_n + x_n - x_{n+1} \qquad B_{n+1} = B_n + 2x_n - 2x_{n+1} \qquad x_{n+1} = x_n + h\,\big[k_1\, A_n\, B_n^2 \;-\; k_2\, x_n\big].$$

7. Este ejercicio ilustra por qué es preferible el método de Euler corregido. Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \qquad \text{con } x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Claramente, la solución del sistema es $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

(i) Utiliza el método de Euler con paso $h = 0'1$ para aproximar $x(t), y(t)$ cuando $t \in [0, 6'3]$. Es decir, plantea las recurrencias

$$x_{n+1} = x_n - hy_n, \qquad y_{n+1} = y_n + hx_n \quad \text{con } x_0 = 1, \;\; y_0 = 0.$$

Representa los datos (x_n, y_n) en el plano xy. ¿Qué observas?

(ii) Utiliza ahora el método de Euler mejorado con $h = 0'2$. Es decir, calcula primero

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n - hy_n, \quad \tilde{y}_{n+1} = y_n + hx_n$$

y después

$$x_{n+1} = x_n - h\,\frac{y_n + \tilde{y}_{n+1}}{2}, \quad y_{n+1} = y_n + h\,\frac{x_n + \tilde{x}_{n+1}}{2}.$$

Representa los datos (x_n, y_n) y compara con la situación anterior.