MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química Control 1, 26/3/2012

[redacted] 9

1.- En cierto circuito eléctrico, la intensidad $I(t)$ y la carga del condensador $Q(t)$ cumplen la ecuación diferencial

$$\begin{cases} I'(t) = -I(t) - 4Q(t) \\ Q'(t) = R\,I(t) - Q(t) \end{cases}$$

Suponer que $R = 1$ ohmio, y que inicialmente $I(0) = 2$, $Q(0) = 0$.

6

(a) Resuelve la ED.

(b) Esboza la gráfica de $Q(t)$ y determina la carga máxima que alcanza el condensador.

(c) ¿Cuánto debería valer R para que la carga del condensador no oscile? ¿Y para que oscile con el doble de frecuencia?

Nota: 6 puntos

a) $\begin{pmatrix} I'(t) \\ Q'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}$

$\rightarrow A \begin{vmatrix} \lambda+1 & 4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \longrightarrow (\lambda+1)^2 + 4 = 0 \iff \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4 = 0$

$\iff \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\hookrightarrow \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm i4}{2}$

$= -1 \pm 2i$ ✓

Solución: $x(t) = \vec{v_1}\, e^{-t} \cos(2t) + \vec{v_2}\, e^{-t} \operatorname{sen}(2t)$.

$\vec{v_1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow I(0) = a\, \cancel{e^{-0} \cos 0}^{\,1} + c\, \cancel{e^{-0} \operatorname{sen} 0}^{\,0} = 2$ Porque $I(0) = 2$

$Q(0) = b\, \cancel{e^{-0} \cos 0}^{\,1} + d\, \cancel{e^{-0} \operatorname{sen} 0}^{\,0} = 0$ y $Q(0) = 0$.

$\rightarrow a = 2$ y $b = 0$; $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$I'(0) = -I(0) - 4Q(0)$
$= -2 - 4\times 0$
$= -2$

$Q'(0) = R \times I(0) - Q(0)$
$= 1 \times 2 - 0$
$= 2.$

derivo $\rightarrow$ $I'(t) = -a e^{-t}\cos(2t) - 2a e^{-t}\,\text{sen}(2t) - c e^{-t}\,\text{sen}(2t) + 2c e^{-t}\cos(2t)$

$I'(0) = -a \cancel{e^{-0}} \underbrace{\cos 0}_{1} - \cancel{2a e^{-0}\,\text{sen}\, 0} - \cancel{c e^{-0}\,\text{sen}\, 0} + 2c \cancel{e^{-0}} \underbrace{\cos 0}_{1}.$

$= 2c - a = -2 \longrightarrow 2c - 2 = -2 \iff c = 0.$

$Q'(t) = -b e^{-t}\cos(2t) - \cancel{2b e^{-t}\,\text{sen}(2t)} - \cancel{d e^{-t}\,\text{sen}(2t)} + 2d e^{-t}\cos(2t)$

$\rightarrow 2d - b = 2. \rightarrow 2d - 0 = 2 \iff d = 1.$

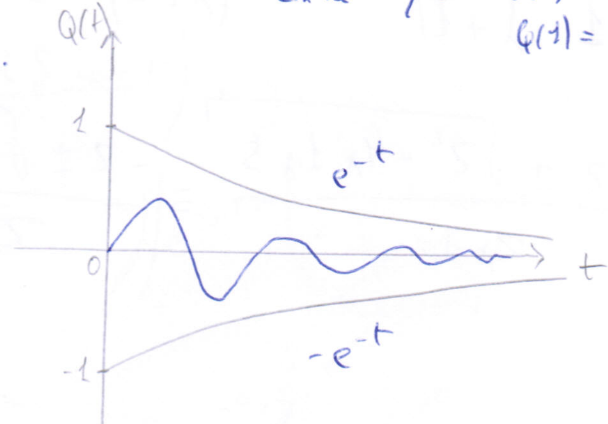
$\vec{v}_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

Solución: $I(t) = 2e^{-t}\cos(2t)$
$Q(t) = e^{-t}\,\text{sen}(2t).$

Entre 0 y 1 $Q(t) > 0$
$Q(1) = \frac{\text{sen}\, 2}{e} > 0.$

b) $Q(t) = e^{-t}\,\text{sen}(2t)$ $\quad Q(0) = 0.$

$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0.$



$Q'(t) = -e^{-t}\,\text{sen}(2t) + 2e^{-t}\cos(2t) = 0$

$\iff 2\cancel{e^{-t}}\cos(2t) = \cancel{e^{-t}}\,\text{sen}(2t)$

$\iff 2 = \frac{\text{sen}(2t)}{\cos(2t)}$

$\iff 2t = \arctan(2) \iff t_{Q\max} \approx 0{,}554$ s.

$\hookrightarrow Q(t_{Q\max}) = e^{-0{,}554}\,\text{sen}(2\times 0{,}554) \approx 0{,}51$ C. $\rightarrow$ Carga Máxima

c) $\begin{pmatrix}-1 & -4\\ R & -1\end{pmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix}\lambda+1 & 4\\ -R & \lambda+1\end{vmatrix} \rightarrow (\lambda+1)^2 + 4R = 0 \iff \lambda^2 + 2\lambda + 4R + 1 = 0.$

$\lambda = \text{algo} \pm \sqrt{2^2 - 4\times 1\times(4R+1)}$

Para que no oscile: $\sqrt{4 - 16R - 4} \geq 0 \iff -16$
$\iff R \leq$

Si R es negativa no oscila.

Para que oscile con el doble de frecuencia:

$\frac{\sqrt{-16R}}{2} = \frac{8}{2} i$ (antes $\frac{4}{2} i$ = frecuencia) $\rightarrow 16R = 64$

$\iff R = \frac{64}{16} = 4$

Si $R = 4$ su frecuencia será el doble.

2.- La cantidad $A(t)$ de cierto isótopo radiactivo acumulada en un cementerio nuclear cumple la ED

$$A'(t) = -0'2A(t) + 2 + \sin t$$

(a) ¿Cuál es la semivida del isótopo ($t =$ días)?

(b) Resuelve la ED con $A(0) = 0$.

(c) Esboza la gráfica de la solución. ¿Entre qué valores oscilará $A(t)$ a largo plazo?

Nota: 4 puntos

2'8

b) $A(0)=0$

Paso 1

$$\frac{dA}{dt} = -0'2A$$

$$\frac{dA}{A} = -0'2\,dt$$

$$\ln A = -0'2t + c$$

$$A(t) = e^{-0'2t} \cdot C(t)$$

Paso 2

$$A'(t) = e^{-0'2t} \cdot C'(t) \cancel{- 0'2 \cdot e^{-0'2t} \cdot C(t)} = \cancel{-0'2A(t)} + 2 + \operatorname{sen} t$$

$$C'(t) = \frac{2 + \operatorname{sen} t}{e^{-0'2t}}$$

$$\int C'(t)\,dt = \int \frac{2}{e^{-0'2t}}\,dt - \int \frac{\operatorname{sen} t}{e^{-0'02t}}\,dt$$

$$C(t) = 2\int e^{0'2t}\,dt + \int (e^{0'02t} \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$C(t) = \frac{2e^{0'2t}}{0'2} - 0'96\cos t \cdot e^{0'2t} + 0'19 e^{0'2t} \operatorname{sen} t + C$$ ✓

$$A(t) = \frac{\cancel{e^{-0'2t}} \cdot \cancel{e^{0'2t}} \cdot 2}{0'2} - \cancel{e^{-0'2t}} \cdot \cancel{e^{0'2t}} \cdot 0'96\cos t + \cancel{e^{-0'2t}} \cdot 0'19 \cancel{e^{0'2t}} \operatorname{sen} t + C \cdot e^{-0'2}$$

$$A(t) = 10 - 0'96\cos(t) + 0'19 \operatorname{sen} t + C \cdot e^{-0'2t}$$

$t=0$

~~A(0)=~~ $0 = 10 - 0'96 + C$

$C = -9'04$

$$A(t) = 10 - 0'96\cos(t) + 0'19 \operatorname{sen}(t) - 9'04 \cdot e^{-0'2t}$$ ✓

2.- La cantidad $A(t)$ de cierto isótopo radiactivo acumulada en un cementerio nuclear cumple la ED

$$A'(t) = -0'2A(t) + 2 + \sin t$$

(a) ¿Cuál es la semivida del isótopo (t = días)?

(b) Resuelve la ED con $A(0) = 0$.

(c) Esboza la gráfica de la solución. ¿Entre qué valores oscilará $A(t)$ a largo plazo?

Nota: 4 puntos

3

$x' = -rx$

a) $A'(t) = -0{,}2\,A(t)$

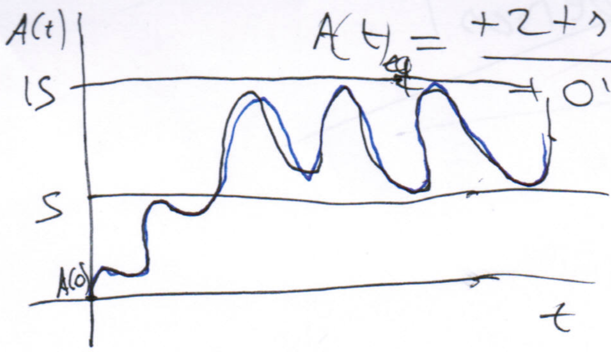
$\hookrightarrow A(t) = C_1 e^{-0{,}2t}$

Sabemos que siempre: $r = \dfrac{\ln 2}{T}$ (semivida)

Aquí $T\,(\text{semivida}) = \dfrac{\ln 2}{r} = \dfrac{\ln 2}{0{,}2} \approx 3{,}47$ ~~años~~ días ✓

c) $A'(t) = -0'2\,A(t) + 2 + \sin t \rightarrow$ equilibrio $A'(t) = 0$

$A(t)_{eq} = \dfrac{+2+\sin t}{+0'2}$



$A(t)_{eq} = 10 + \dfrac{\sin t}{0'2}$ aprox correcto

Oscilara entre 15 y 5

c) La gráfica correcta de

$$A(t) = 10 + \underbrace{\frac{5}{26}\sin t - \frac{25}{26}\cos t}_{\frac{5}{\sqrt{26}}\cos(t + 0'2)} - \frac{235}{26}e^{-0'2t}$$

oscilará entre $10 \pm \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\approx$ entre 9 y 11.