Examen extraordinario de julio. Matemáticas gI, 1º Ing. Química 2/7/2012

Nombre y dni: ..

1.- En una reacción química reversible $A \rightleftarrows X$, la cantidad del reactivo A tras t min cumple

$$A'(t) = -A(t) + k\big(A(0) - A(t)\big), \qquad A(0) - A(t) = X(t)$$

(a) Se observa que a largo plazo la cantidad de reactivo A se reduce a una sexta parte del inicial. Determina el valor de k ¿Qué reacción va más rápida?

(b) Resuelve la ED y esboza la gráfica de la solución. Determina la cantidad de reactivo A tras 1 minuto. ¿Cuántos minutos tardará el reactivo inicial $A(0)$ en reducirse a una cuarta parte?

Nota: 2 puntos

1'7

a) $A_{eq} = \dfrac{A(0)}{6}$

$$0 = -A_{eq} + k\,(A(0) - A_{eq})$$

$$0 = -\frac{A(0)}{6} + k\left(\frac{A(0)}{1} - \frac{A(0)}{6}\right)$$

Va más rápida la reacción $X(t)$; es decir, la de formación del producto X. ✓

$$0 = -\frac{A(0)}{6} + k\left(\frac{5A(0)}{6}\right)$$

✓

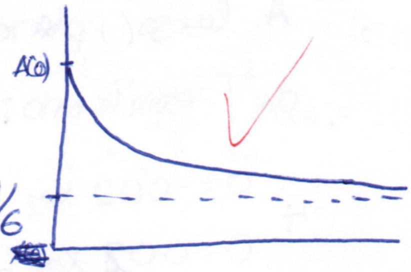
$$+\frac{A(0)}{6} = 5k\,\frac{A(0)}{6} \longrightarrow \boxed{k = 1/5}$$

b) mal $e^{-1'2t}$

$$A(t) = Ce^{-t} + A_{eq}$$

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = A_{eq}$$

$$A(t) = Ce^{-t} + \frac{A(0)}{6}$$



✓

$$A(0) = C\cdot 1 + \frac{A(0)}{6} \qquad C = \frac{5A(0)}{6}$$

$$A(t) = \frac{5A(0)}{6}e^{-t} + \frac{A(0)}{6} \longrightarrow \boxed{A(t) = \frac{A(0)}{6}\left(5e^{-t}+1\right)} \checkmark$$

$$A(1) = \frac{A(0)}{6}\left(5e^{-1}+1\right) = 0'47\,A(0) \simeq \frac{A(0)}{2}$$

bien salvo error.

$$\frac{A(0)}{4} = \frac{A(0)}{6}\left(5e^{-t}+1\right) \longrightarrow \frac{6}{4} = 5e^{-t}+1 \longrightarrow \boxed{t = 2'3\,\text{min}}$$

||

$\boxed{\text{2min 18seg.}}$

b) $t=0$

$A = A(0)$ $\quad A(0) = C\cdot e^{-kt} + A_{eq}$ ✓

$$A(0) = C\cdot e^{-T/5} + \frac{A(0)}{6}$$

$$A_0 - \frac{A_0}{6} = C \qquad \boxed{C = \frac{5}{6}A_0}$$ ✓

$t=1$

$$\boxed{A(t) = \frac{5}{6}A(0)\cdot e^{-\frac{6}{5}t} + \frac{A_0}{6}}$$ ✓

$$A(t) = \frac{A_0}{6}\left(5\cdot e^{-6/5} + 1\right)$$

$\cancel{A(t) = 0'84A(0)}$

$\boxed{A(t) = 0'417 A_0}$ ✓

$A = \frac{A_0}{4}$

$$\frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{6} + \frac{5}{6}A_0\cdot e^{-t\cdot 6/5}$$

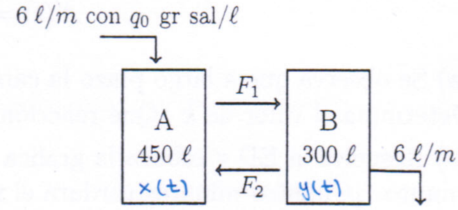
$$\frac{A_0}{4} - \frac{A_0}{6} = \frac{5}{6}A_0\cdot e^{-t\,6/5}$$

$$\frac{2A_0}{24} = \frac{5}{6}A_0\cdot e^{-t\cdot 6/5} \rightarrow \frac{2\cdot \cancel{A_0}\cdot 6}{25\cdot 5\cdot \cancel{A_0}} = e^{-t\,6/5}$$

$$5 \rightarrow \ln\left(\frac{12}{125}\right) = -t\cdot\frac{6}{5} \rightarrow t = 1'95$$ ✓

2.- Se tienen dos tanques con volúmenes constantes de 450 y 300 litros de agua, respectivamente. Las cantidades de sal $x(t)$ e $y(t)$ en cada uno de los tanques tras t minutos cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) = -0'02\,x(t) + 0'01\,y(t) + 8 \\ y'(t) = 0'02\,x(t) - 0'03\,y(t) \end{cases}$$



3

(a) A partir de la ED determina el valor de las constantes F_1, F_2 (en ℓ/min) y q_0 (en gr/ℓ).

(b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de sal en cada tanque? ¿Y la concentración?

(c) Resuelve la ED si inicialmente $x(0) = 0$, $y(0) = 700$, esbozando las gráficas de $x(t)$ e $y(t)$.

Nota: 3 puntos

a) $0'02 = \frac{\text{sale de } x}{450} \Rightarrow$ sale de $x = 9\,\ell$ $\quad \boxed{F_1 = 9\ell}$

$0'01 = \frac{\text{entra a } x}{300} \Rightarrow$ entra a $x = 0'01 \times 300 = 3$ $\quad \boxed{F_2 = 3\ell}$

$q\ \text{gr}/\ell \times \underbrace{F\ \ell/\text{min}}_{6} = 8$ $\quad \boxed{q_0 = 4/3\ \text{gr}/\ell}$

$q = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\ \text{gr/min} = 4/3\ \text{gr}/\ell$

b) A largo plazo, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \dots \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \dots$

$$\begin{cases} x'(t) = -0'02\,x(t) + 0'01\,y(t) + 8 \\ y'(t) = 0'02\,x(t) - 0'03\,y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -0'02\,x_{eq} + 0'01\,y_{eq} + 8 = 0 \\ 0'02\,x_{eq} - 0'03\,y_{eq} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow 0'02\,x_{eq} = 0'03\,y_{eq} \rightarrow x_{eq} = \frac{0'03\,y_{eq}}{0'02} \Rightarrow x_{eq} = \frac{0'03 \cdot 400}{0'02}$ $\quad \boxed{x_{eq} = 600}$

$-0'\cancel{02} \cdot \left(\frac{0'03\,y_{eq}}{0'\cancel{02}}\right) + 0'01\,y_{eq} + 8 = 0$

$-0'03\,y_{eq} + 0'01\,y_{eq} + 8 = 0$

$-0'02\,y_{eq} + 8 = 0$; $\quad -0'02\,y_{eq} = -8$ $\quad \boxed{y_{eq} = \frac{-8}{-0'02} = 400}$

$\rightarrow q_1 = \frac{x(t)}{V_1} = \frac{x_{eq}}{V_1} = \frac{600}{450} = \frac{4}{3}$ gr/ℓ $\quad \boxed{q_{eq1} = 4/3\ \text{gr}/\ell}$

$\rightarrow q_2 = \frac{x(t)}{V_2} = \frac{y_{eq}}{V_2} = \frac{40\cancel{0}}{30\cancel{0}} = \frac{4}{3}$ gr/ℓ. $\quad \boxed{q_{eq2} = 4/3\ \text{gr}/\ell}$

↳ A largo plazo, las concentraciones de ambos tanques se igualan y es igual a la concentración inicial.

$$\boxed{\begin{matrix} x_{eq} = 600 \text{ gr sal} & q_{eq1} = 4/3\ \text{gr}/\ell \\ y_{eq} = 400 \text{ gr sal} & q_{eq2} = 4/3\ \text{gr}/\ell \end{matrix}}$$

c) Resuelve la E.D. con $x(0) = 0$ y $y(0) = 700$, Gráficas.

$\xrightarrow{\times 100} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

⊙ Autovalores: $|\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 = (6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2) - 2 = 0$

$= \lambda^2 + 5\lambda + 6 - 2 = 0$

Finalmente: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ $\quad \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow \boxed{\lambda = -1} \\ \searrow \boxed{\lambda = -4} \end{matrix}$ → Autovalores negativos ⇒ Teorema 2,,

⊙ Autovectores: $\boxed{\lambda = -1}$

Busco $\vec{p_1} = \binom{u}{v}$

$A\vec{p_1} = \lambda_1 \cdot \vec{p_1}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \binom{u}{v} = \binom{-u}{-v}$ $\quad \begin{cases} -2u + v = -u \\ 2u - 3v = -v \end{cases} \rightarrow \boxed{v = u}$ $\quad \boxed{\vec{p_1} = \binom{1}{1}}$

$\boxed{\lambda = -4}$ $\quad A \cdot \vec{p_2} = \lambda_2 \cdot \vec{p_2}$ $\quad$ Busco $\vec{p_2} = \binom{u}{v}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \binom{u}{v} = \binom{-4u}{-4v}$ $\quad \begin{cases} -2u + v = -4u \\ 2u - 3v = -4v \end{cases}$ $\quad v = -\dots \quad \boxed{\vec{p_2} \dots}$

$X(t) = c_1 \cdot \binom{1}{1} \cdot e^{-0'01 \cdot t} + c_2 \cdot \binom{1}{-2} \cdot e^{-0'04 \cdot t} + \binom{600}{400}$ → Finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= -300\,e^{-0'01 \cdot t} - 300\,e^{-0'04 \cdot t} + \dots \\ y(t) &= -300\,e^{-0'01 \cdot t} + 600\,e^{-0'04 \cdot t} \dots \end{aligned}}$$

$x(0) = 0$ $\quad 0 = c_1 + c_2 + 600 \rightarrow c_1 = -c_2 - 600$

$y(0) = 700$ $\quad 700 = c_1 - 2c_2 + 400$ $\quad c_1 = -(-300) - 600$ $\quad \boxed{c_1 = -300}$

↳ $700 = (-c_2 - 600) - 2c_2 + 400$

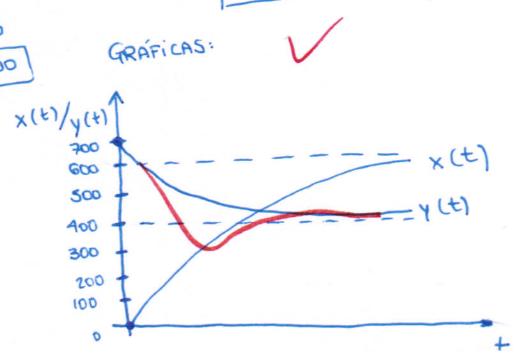
$700 = -c_2 - 600 - 2c_2 + 400$

$700 = -3c_2 \quad -200$

$-3c_2 = 900$

$\boxed{c_2 = -300}$

GRÁFICAS:



3.- Un fluido se mueve según con campo de velocidad $\vec{v} = (0, y^2, 0)$.

(a) Calcula el flujo neto saliente a través de las paredes de la caja cerrada $R = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$. ¿Por cuál de las paredes sale más flujo?

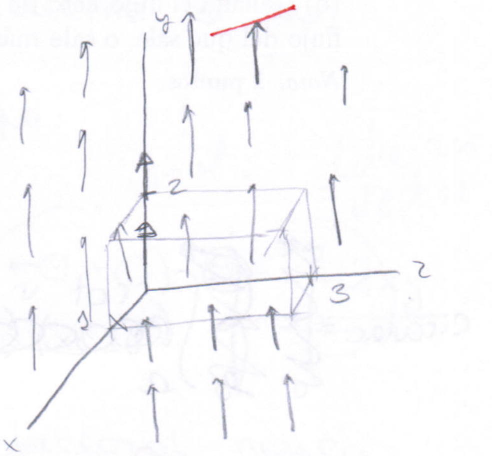
(b) Si la densidad en R viene dada por $\rho(x,y,z) = (x+z)^2 y$, ¿qué puntos son más densos, y cuáles menos?

(c) Calcula la energía cinética producida por el fluido en R, dada por la integral

$$\iiint_R \rho(x,y,z)\, |\vec{v}\,|^2 \, dx\, dy\, dz.$$

Nota: 2'5 puntos

2'4 $v = (0, y^2, 0)$



a) - pasa más flujo por las paredes que están en el plano (x,z) ya que por las demás es nulo.

$(0,0,0) = (0,0,0)$
$(0,1,0) = (0,1,0)$
$(0,2,0) = (0,2,0)$
$(1,2,0) = (0,4,0)$

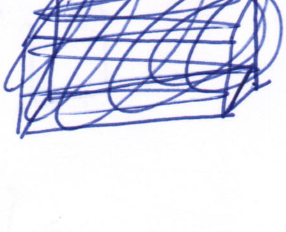
$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 2y$$

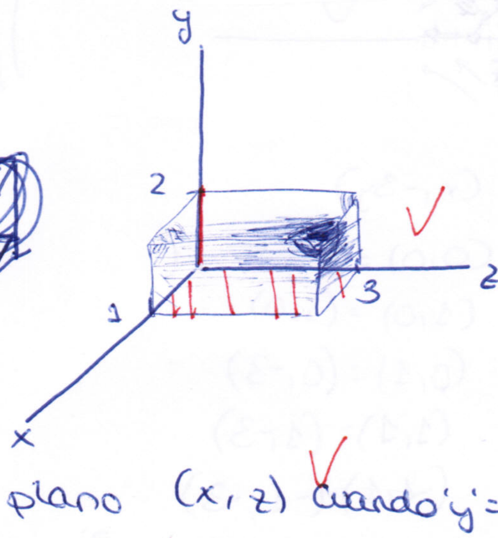
$$\int_0^1 \left[\int_0^2 \left[\int_0^3 (2y)\, dz \right] dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^2 \left[2yz \right]_0^3 dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^2 (6y)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{6y^2}{2} \right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left[3y^2 \right]_0^2 dx = \int_0^1 12\, dx = 12$$

b) $\rho = (x+z)^2 y$





el punto más denso sería el $(1,2,3)$

los puntos con densidad=0 están situados en la cara de abajo, en el plano (x,z) cuando 'y'=0 y sobre el eje 'y'; ya que 'x' y 'z' valen 0.

c) $$E_c = \int_0^1 \left[\int_0^2 \left[\int_0^3 (x+z)^2 y \left(\cancel{\sqrt{0+y^2+0}}\right)^2 dz\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^2 \left[\int_0^3 (x+z)^2 y^{3}\, dz\, dy\, dx = \right.\right.\right.\right.$$

Error 5

$$= \int_0^1 \left[\int_0^2 \left[y^3 \frac{(x+z)^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3} dy\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^2 y^3 \left(\frac{(x+3)^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right) dy\, dx = \right.\right.$$

bien salvo err.

$$\left[\frac{(x+3)^4}{12} - \frac{x^4}{12} \right]_0^1 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^2 = \left(\frac{4^4}{12} - \frac{1^4}{12} - \frac{3^4}{12} \right) \frac{16}{4} = \frac{174}{12} \cdot \frac{16}{4} = 58$$

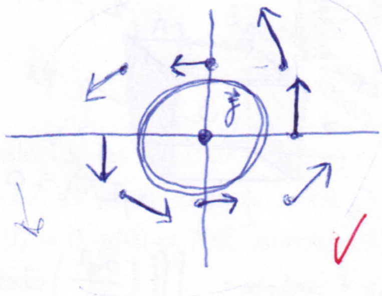
4.- Esboza los campos de velocidad de los fluidos $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-y, 3x)$ y $\vec{\mathbf{w}}_2 = (x, -3y)$

(a) Calcula la circulación de $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo de la circunferencia centrada en el origen y de radio 2. ¿En qué sentido gira el fluido?

(b) Calcula el flujo neto de $\vec{\mathbf{w}}$ a través del triángulo de vértices $(-1,0), (0,1), (1,0)$. ¿Entra más flujo del que sale, o sale más del que entra?

Nota: 2 puntos

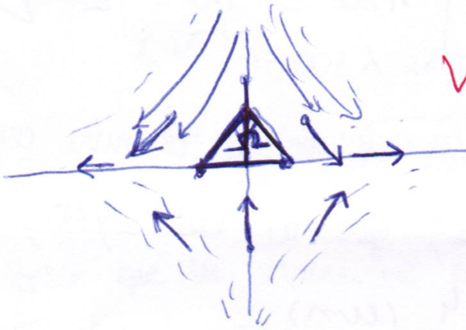
$\vec{v}_1 = (-y, 3x)$



$\vec{v}_1(0,0) = (0,0)$
$(0,1) = (-1,0)$
$(1,1) = (-1,3)$
$(0,-1) = (1,0)$
$(1,0) = (0,3)$
$(1,-1) = (1,3)$
$(-1,1) = (-1,-3)$
$(-1,-1) = (1,-3)$

2

$\vec{w}_2 = (x,-3y)$



$\vec{v}_2(0,0) = (0,0)$
$(0,1) = (0,-3)$
$(1,1) = (1,-3)$
$(0,-1) = (0,3)$
$(1,0) = (1,0)$
$(1,-1) = (1,3)$
$(-1,1) = (-1,-3)$
$(-1,-1) = (-1,3)$

circunferencia cerrada

a) $\text{cir} = \int_\gamma \vec{v}(x,y)\,dxdy = \int_\gamma \underbrace{-y}_{P}\,dx + \underbrace{3x}_{Q}\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint \left(+\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial 3x}{\partial x}\right) dxdy = \iint 4\,dxdy = 4$ área circunf

$4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\pi\cdot 2^2 = 16\pi$, → El fluido gira en sentido antihorario.

b) $\text{Flujo} = \oint_{\partial\Omega} \vec{w}\,\vec{n} \overset{\text{Green 2}}{=} \iint_\Omega (\text{div}\,\vec{w})\,dxdy = \iint \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-3y)}{\partial y}\right) dxdy = \iint (1-3)\,dxdy = -2$ área triá

$\partial\Omega$ ↓ Frontera triángulo

$= -2\cdot 1\,m^2$ área triángulo $= -2$ → según el convenio de signos adoptados en clase → Flujo entrante → ⊖
" saliente → ⊕.

Por lo que al ser el neto < 0; entra más flujo del que sale

5.- Considera el campo de vectores $\vec{\mathbf{F}} = (x^2y, -xy^2, az^2)$, donde a es un parámetro.

(a) Justificar si para algún valor de a puede ser $\vec{\mathbf{F}}$ un campo gradiente.

Nota: 0'5 puntos

Para que $\vec{F}$ sea un campo gradiente ; $\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

0'5

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2y & -xy^2 & az^2 \end{vmatrix} = \cancelto{0}{\frac{\partial az^2}{\partial y}} \vec{i} + \cancelto{0}{\frac{\partial x^2y}{\partial z}} \vec{j} + \frac{\partial(-xy^2)}{\partial x} \vec{k}$$

$$- \left(\frac{\partial x^2y}{\partial y} \vec{k} + \cancelto{0}{\frac{\partial(-xy^2)}{\partial z}} \vec{i} + \cancelto{0}{\frac{\partial az^2}{\partial x}} \vec{j} \right) = -y^2 \vec{k} - x^2 \vec{k} =$$

$-(y^2+x^2)\vec{k} \rightarrow$ Al tratarse de esta dirección (eje z); independientemente del valor de a; el rotacional nunca va a ser nulo.

✓