Examen final de Matemáticas II (1º Ing. Química) 1/6/2012

Nombre y dni: [redacted]

1

1.- Un lago, de volumen 500 m^3, está en el curso de un río, recibiendo un caudal de 8 m^3 de agua por día y aportando la misma cantidad río abajo. El lago está conectado mediante canales con un pequeño arrozal, de volumen 20 m^3, con el que intercambia 2 m^3 de agua al día. Una instalación industrial que vierte en la zona alta del río hace que el caudal entrante en el lago tenga una concentración de 125 gramos de detergentes por m^3. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan respectivamente los gramos de detergente en el lago y el arrozal tras t días.

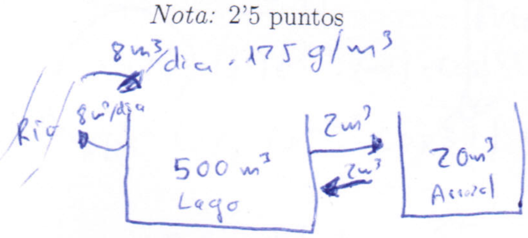
a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ e $y(t)$ (no resolver).

b) A largo plazo, ¿qué cantidad de detergente (en gramos) habrá en el lago y en el arrozal? ¿Cuál será la concentración en cada uno (en gramos/m³)?

c) Se instala un sistema de limpieza en el arrozal. ¿Cuántos gramos de detergente se deberían retirar por día para que a largo plazo la concentración en el arrozal no supere los 50 gr/m³?

2'5

Nota: 2'5 puntos



a)

$$x'(t) = \frac{-10}{500}x(t) + \frac{2}{20}y(t) + 1000$$

$$y'(t) = \frac{2}{500}x(t) - \frac{2}{20}y(t)$$

b)

$0 = -2x_{eq} + 10y_{eq} + 100000$

$0 = -10y_{eq} + 0{,}4x_{eq}$

$x_{eq} = \frac{10y_{eq}}{0{,}4} = 25y_{eq}$

$-50y_{eq} + 10y_{eq} = -100000$

$-40y_{eq} = -100000$

$y_{eq} = \frac{100000}{40} = 2500$ gramos

$x_{eq} = 25 \cdot 2500 = 62500$ gramos

$q_1 = \frac{62500}{500} = 125\,g/m^3$

$q_2 = \frac{2500}{20} = 125\,g/m^3$

- En el lago habrán a largo plazo 62500 gramos y en el arrozal 2500 gramos, ambos con una concentración de 125 g/m³.

c) $y_{eq} = 50 \cdot 20 = 1000$ gramos.

R = cantidad que debemos retirar al día.

$-2x_{eq} + 10000 + 100000 = 0$

$x_{eq} = \frac{110000}{2} = 55000$ gramos.

$-10(1000) + 0{,}4 \cdot 55000 - 100R = 0$

$12000 = 100R \quad R = \frac{12000}{100} = \boxed{120}$

. Debemos retirar 120 gramos al día para que la concentración no supere los 50 gr/m³.

2.- En un circuito LCR, la diferencia de potencial en el condensador $V(t)$ cumple la ecuación diferencial

$$V''(t) + 8\,V'(t) + 25V(t) = 0.$$

Si inicialmente $V(0) = 220$, y al cabo de $\frac{\pi}{2}$ minutos se tiene $V(\frac{\pi}{2}) = -220e^{-2\pi}$.

✓ a) Resuelve la ecuación diferencial.

✓ b) Esboza la gráfica de la solución y determina cuándo se alcanza por primera vez $V(t) = 0$.

✓ c) Resuelve la ED no homogénea que resulta al añadir un voltaje externo $\mathcal{E}(t) \equiv 250$.

Nota: 2'5 puntos

2'5

a) $V''(t) + 8V'(t) + 25V(t) = 0$

$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 25}}{2} =$

$= -4 \pm \dfrac{\sqrt{-36}}{2} = -4 \pm 3i$ ✓

$V(t) = C_1 e^{-4t}\cos(3t) + C_2 e^{-4t}\sin(3t)$

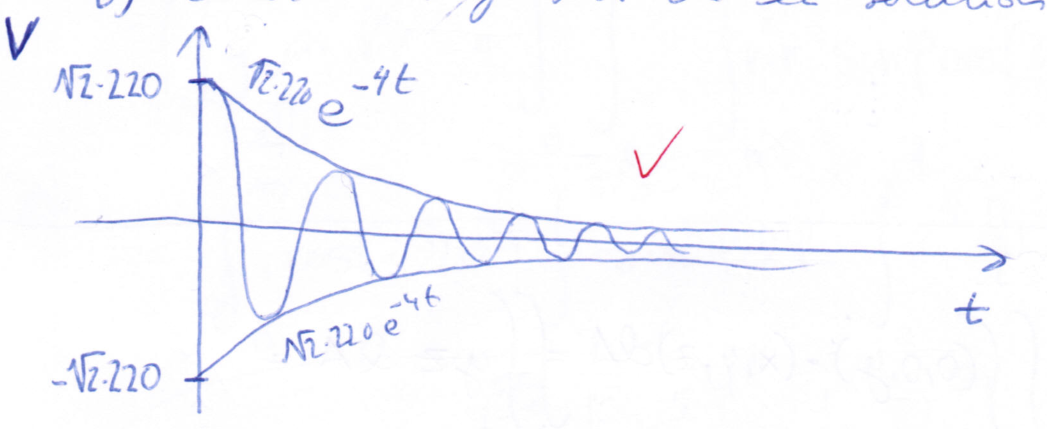
$V(0) = 220.$

$\boxed{220 = C_1}$

$V(\frac{\pi}{2}) = -220\cancel{e^{-2\pi}} = -C_2\cancel{e^{-2\pi}} \Rightarrow \boxed{C_2 = 220}$ ✓

$V(t) = 220e^{-4t}\cos(3t) + 220e^{-4t}\sin(3t)$ (V)

b) Esboza la gráfica de la solución.



✓

Pasamos a la forma $A\cos(x - \varphi)$

$A = \sqrt{2}\cdot 220\, e^{-4t}$

$\varphi = 0{,}79 = \pi/4$

$V(t) = \sqrt{2}\cdot 220\, e^{-4t}\cos(3t - 0{,}79)$ (V) ✓

cuando se alcanza por primera vez $V(t) = 0$

$0 = 220e^{-4t}\cos(3t) + 220e^{-4t}\sin(3t) \Rightarrow$

$-\cancel{220e^{-4t}}\cos(3t) = \cancel{220e^{-4t}}\sin(3t)$

$-1 = \dfrac{\sin(3t)}{\cos(3t)} \Rightarrow -1 = \tan(3t) \Rightarrow \arctan(-1) = 3t$

$\Rightarrow t = \dfrac{(\arctan(-1)) + \pi}{3} \simeq 0{,}79$ minutos $\simeq 47$ segundos.

✓

c) ED no homogénea:

$$V''(t) + 8V'(t) + 25V(t) = 250$$

Buscamos $V_p = a$.

$$\underbrace{V''_p}_{0} + 8 \cdot \underbrace{V'_p}_{0} + 25 \cdot V_p = 250 \Rightarrow 25 \cdot a = 250 \Rightarrow$$

$$V_p = 10.$$ ✓

$$V(t) = V(t)_{homogénea} + V_p$$

$$V(t) = C_1 e^{-4t}\cos(3t) + C_2 e^{-4t}\operatorname{sen}(3t) + 10$$ ✓

$V(0) = 220$

$$220 = C_1 + 10 \Rightarrow \boxed{C_1 = 210}$$

$V(\frac{\pi}{2}) = -220e^{-2\pi}$

$$-220e^{-2\pi} = -C_2 e^{-2\pi} + 10 \Rightarrow C_2 = \frac{10 + 220e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 10e^{2\pi} + 220}$$ ✓

$$V(t) = 210e^{-4t}\cos(3t) + (220 + 10e^{2\pi}) e^{-4t}\operatorname{sen}(3t) + 10 \quad (V)$$

✓

---

c) Flujo a través de S.

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA = \iint_S (0,0,y) \cdot (x,y,z)\, dA = \iint_S yz\, dA =$$

(hacemos cambio a coordenadas esféricas)

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0{,}22$$ ✓

$$\underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}}_{1} \cdot \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/3}}_{0{,}22}$$

campo $\vec{v} = (0,0,y$

incorrect

3.- Consideramos una región sólida Ω de la bola unidad de $\mathbb{R}^3$, dada por

$$\Omega = \left\{ r \in [0,1],\ \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{3}],\ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \right\},$$

y cargada eléctricamente con densidad de carga $\rho = r^2 \sin\varphi \cos(2\theta)$.

√ (a) Esboza Ω, indicando en el dibujo los puntos de carga nula y carga máxima.

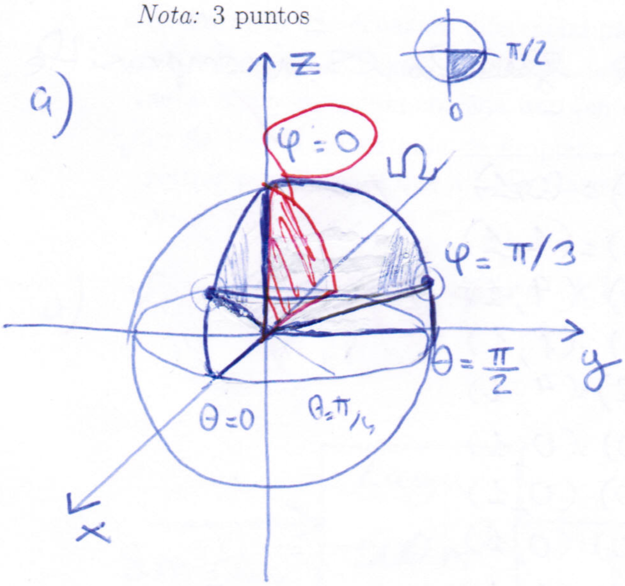
√ (b) Determina la carga total de Ω.

√ (c) Esboza el campo de vectores $\vec{\mathbf{v}} = (0,0,y)$ y calcula el flujo saliente a través de S, donde S es la parte superior de Ω en contacto con la esfera unidad.

Nota: 3 puntos

2'8

a)



$\Omega = \{ r \in [0,1],\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}],\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$

La d. carga es $\rho = r^2 \sin\varphi \cos(2\theta)$

En el origen y en el eje la carga será nula. ✓

Cuando $\theta = 0^\circ$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ y $r = 1$ la carga será máxima. ✓

Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ y $r = 1$ la carga será otra vez máxima pero con valor negativo. ✓

~~A partir de~~ $\theta = \frac{\pi}{4}$ la carga es negativa ✓

b) Determinación carga total de Ω.

$$\iiint_\Omega \rho \cdot dV = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \cos(2\theta) \cdot \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(2\theta)\, d\theta \int_0^{\pi/3} \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r^4 \, dr =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \cdot \left[\quad \right]_0^{\pi/3} = 0 \quad ✓$$

$\qquad\ \ 0$

$$\int_0^{\pi/3} \sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi/3} d\varphi - \int_0^{\pi/3} \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/3} d\varphi - \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi$$

$$= [\varphi]_0^{\pi/3} - \left[\tfrac{1}{2}\varphi\right]_0^{\pi/3} - \left[\tfrac{1}{4} \sin 2\varphi\right]_0^{\pi/3}$$

c) (en la página anterior)

4.- El campo de velocidades de un fluido viene dado por $\vec{\mathbf{v}} = (y^2, 1)$.

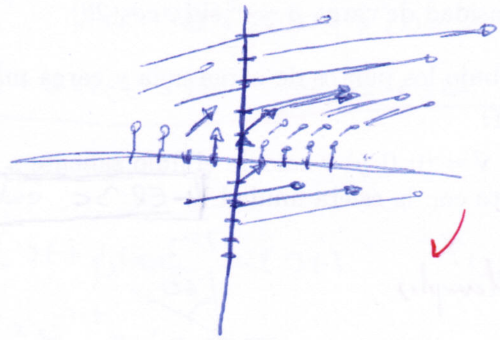
a) Esboza el campo, calcula rot $\vec{\mathbf{v}}$ y div $\vec{\mathbf{v}}$, y explica si el fluido rota y/o se expande.

b) Si T es el triángulo de vértices $(0,0), (1,1), (1,0)$, calcula la circulación de $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo de la frontera de T, así como el flujo neto saliente a través de ∂T.

Nota: 2 puntos

2

$\vec{v} = (y^2, 1)$



$(0,0) = (0,1)$ $(-1,1) = (1,1)$
$(0,1) = (1,1)$ $(-1,0) = (0,1)$
$(0,2) = (4,1)$ $(0,-1) = (1,1)$
$(1,1) = (1,1)$
$(1,2) = (4,1)$
$(0,3) = (9,1)$
$(3,0) = (0,1)$
$(0,-2) = (4,1)$
$(-2,-2) = (4,1)$

~~rot~~ $\operatorname{div}\vec{v} = \left(\dfrac{\partial(y^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(1)}{\partial y}\right) = 0$ no se expande

$\operatorname{rot} = \left(-\dfrac{\partial(y^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(1)}{\partial x}\right) = -2y$ el fluido rota

b)

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le x$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{rot}\vec{v}\, dx\, dy = \iint -2y\, dx\, dy$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^x (-2y)\, dy\right] dx$$

$$\int_0^1 \left[-y^2\right]_0^x dx \to \int_0^1 (-x^2)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_0^1 = -1/3$$