MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química Test 2, 20/2/2012

Nombre: ....

En cierta reacción química, el volumen (en litros) de producto tras t horas, $x(t)$, cumple la ecuación diferencial

$$x'(t) = k\,(15 - x(t))\,(60 - x(t)),$$

donde k =cte positiva. Si inicialmente $x(0) = 0$ y tras una hora se han creado 6 litros,

(a) Esboza la gráfica de $x(t)$ y determina el volumen a largo plazo.

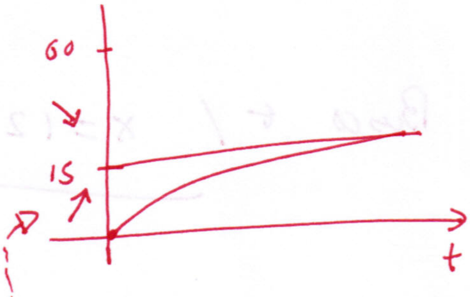
(b) ¿Cuánto tardarán en obtenerse 12 litros de producto?

NO → (c) Determina si $x(t)$ tiene un punto de inflexión.

(a) Busco sol de equilibrio $x(t) \equiv x_{eq}$

$0 = k(15 - x_{eq})(60 - x_{eq}) \Rightarrow x_{eq} < \begin{matrix} 15 \\ 60 \end{matrix}$

Si $x(0) = 0 \Rightarrow x'(0) = \oplus \to$ crece



NO → (c) Busco ptos inflexión $x''(t) = 0$

$x'(t) = k\,(900 - 75x(t) + x^2(t))$

$x''(t) = k\,(-75x'(t) + 2x(t)x'(t)) = \underbrace{k\,x'(t)}_{\oplus}\underbrace{(-75 + 2x(t))}_{=0} \Leftrightarrow x(t) = \frac{75}{2} = 37'5$

Como observamos $x(t) \leq 15$ siempre

$\Rightarrow$ no tiene ptos de inflexión.

$\Rightarrow$ $x''(t)$ $\ominus$ $\to$ cóncava.

(b) Resuelvo la ED

$$\frac{dx}{dt} = k(15-x)(60-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int k\,dt = kt + C_1$$

$$\frac{1}{(15-x)(60-x)} = \frac{1}{45}\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right) \Rightarrow \frac{1}{45}\left(-\ln(15-x) + \ln(60-x)\right) = kt + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{60-x}{15-x}\right) = 45kt + \tilde{C}_1}$$

$t=0 \quad x=0 \longrightarrow \quad \ln\left(\frac{60}{15}\right) = \tilde{C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{C} = \ln 4$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{60-x}{15-x}\right) = 45Kt + \ln 4$$

$t=1, \ x=6 \longrightarrow \quad \ln\left(\frac{60-6}{15-6}\right) = 45K + \ln 4 \quad \Rightarrow \quad 45K = \ln\frac{54}{9} - \ln 4 = \ln(3/2)$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{60-x}{15-x}\right) = \left(\ln\frac{3}{2}\right) t + \ln 4$$

Busco $t \,/\, x = 12 \longrightarrow \quad \ln\left(\frac{60-12}{15-12}\right) = \left(\ln\frac{3}{2}\right) t + \ln 4$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{48}{3}\right) - \ln 4 = \left(\ln\frac{3}{2}\right)\cdot t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln 16 - \ln 4}{\ln(3/2)} = \frac{\ln 4}{\ln(3/2)} = 3'42 \text{ horas}$$

$$\simeq 3 \text{ h } 25 \text{ min}$$