MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química   Test 5, 23/4/2012

N[redacted] ....

10

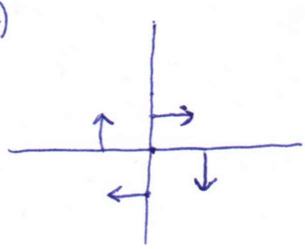
Consideramos un fluido en $\mathbb{R}^2$ con campo de velocidades $\vec{\mathbf{v}} = (y, -x)$.

(a) Representa el campo $\vec{\mathbf{v}}$, y justifica si el fluido rota y/o se expande.

(b) Calcula la circulación de $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo del rombo de vértices $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ (en sentido antihorario).

(c) Si la densidad del fluido es $\rho = 1/(1+2r^2)$, calcula la masa de la porción de fluido en el disco de centro el origen y radio 2.

a)



$\vec{v}(x,y) = (y, -x)$

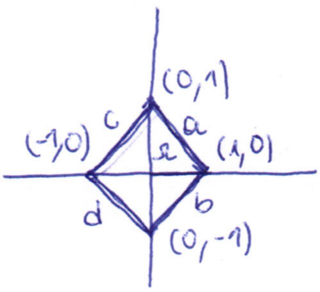
$\begin{cases} \vec{v}(0,1) = (1,0) \\ \vec{v}(0,-1) = (-1,0) \\ \vec{v}(1,0) = (0,-1) \\ \vec{v}(-1,0) = (0,1) \end{cases}$

$\begin{cases} P = y \\ Q = -x \end{cases}$

– Para ver si rota: $\operatorname{rot}\vec{v} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1-1 = -2$ El fluido rota en sentido horario.

– Para ver si se expande: divergencia $\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(-x)}{\partial y} = 0+0 = 0$ El fluido es incompresible.

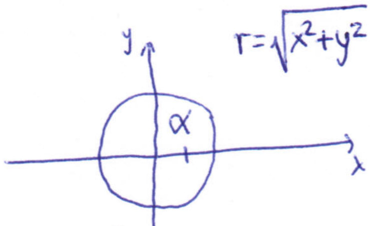
b) $\oint_{\partial\Omega} \vec{v}\,\vec{n} = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy \to$ Podemos aplicar el teorema de Green, al tratarse de una superficie cerrada.



circulación $= \iint_\Omega \left(-\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(-x)}{\partial x}\right) dxdy = \iint_\Omega -1+-1\, dxdy = -2\iint_\Omega dxdy =$

$= -2\,\text{área} = -4$

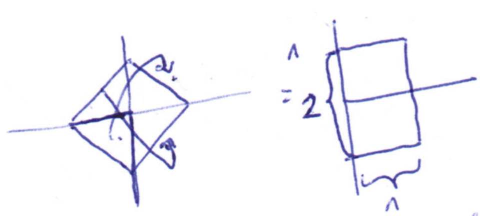
c) $\rho = \frac{1}{(1+2r^2)} \to$



Integral de una función radial en región circular

$M_T = \iint_\alpha \rho\, dxdy = \int_\alpha 2\pi r \cdot \rho \cdot dr = \int_0^2 2\pi r \frac{1}{1+2r^2} dr = 2\pi \int_0^2 \frac{r}{1+2r^2} dr = \frac{\pi}{2}\int_0^2 \frac{4r}{1+2r^2} dr =$

$\frac{\pi}{2} \ln(1+2r^2)\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}\left\{\ln(9) - \cancel{\ln(1)}^{0}\right\} = \frac{\pi}{2}\ln 9$



Área $= 2 \cdot 1 = 2$ unidades^2