Matemáticas II. 1º Ingeniería Química. Control 1. 8/4/2013

Nombre y dni:

1.- Una planta depuradora contiene dos depósitos de volumen constante. De manera continua, el primero purifica un 20% de su contenido por hora, y vierte un 10% en el segundo. Por otro lado, el segundo purifica un 10% y vierte un 5% de la mezcla en un río cercano. A las 0:00 horas un técnico inicia una prueba de mantenimiento, echando en el primer depósito 5 Kgs de un producto colorante muy soluble.

(a) Formula una ecuación diferencial para la evolución del colorante en los depósitos.

(b) Si los depósitos mantienen volumen constante, y el primero tiene 100 m^3, ¿cuál es el volumen del segundo?

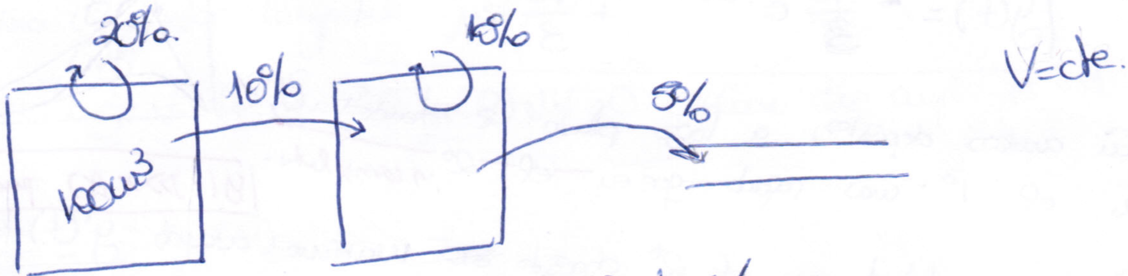
(c) Resuelve la ED y esboza la gráfica de las soluciones. A largo plazo, ¿en qué depósito habrá más colorante?

(d) Cuando la cantidad de colorante es máxima en el segundo depósito, ¿en cuál de ellos hay más colorante? ¿Dónde es mayor la concentración?

(e) Determina qué cantidad de colorante pasará finalmente al río.

Nota: 7 puntos

6'7



$x(t)$ = cantidad de colorante en el 1º depósito.

$y(t)$ = cantidad de colorante en el 2º depósito.

$x(0) = 5$

$y(0) = 0$

se "quita" de la limpieza — pasa al otro tanque.

a) $x'(t) = -0'2\,x(t) - 0'1\,x(t) = -0'3\,x(t)$

$y'(t) = 0'1\,x(t) \underbrace{- 0'1\,y(t)}_{\text{De la limpieza}} - 0'05\,y(t)$ → Que pasa al río.

$$\begin{cases} x'(t) = -0'3\,x(t) \\ y'(t) = 0'1\,x(t) - 0'15\,y(t) \end{cases}$$ ✓

b) Como el volumen se mantiene constante, el caudal de entrada y de salida del 2º depósito tiene que ser el mismo.

$F_1 = F_2$ $\quad F_1 = 0'10 \cdot 100 = 10\,m^3 = 0'05\,V_2$

$$\boxed{V_2 = 200\,m^3}$$ ✓

1. Autovalores: de $\begin{pmatrix} -0'3 & 0 \\ 0'1 & -0'15 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -0'3-\lambda & 0 \\ 0'1 & -0'15-\lambda \end{vmatrix} = (-0'3-\lambda)(-0'15-\lambda) = (0'3+\lambda)(0'15+\lambda) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -0'3 \\ \lambda = 0'15 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -0'3$

$0'1\,a + 0'15\,b = 0 \longrightarrow a = -1'5\,b \qquad \vec{p}_1 \begin{pmatrix} -1'5 \\ 1 \end{pmatrix}$

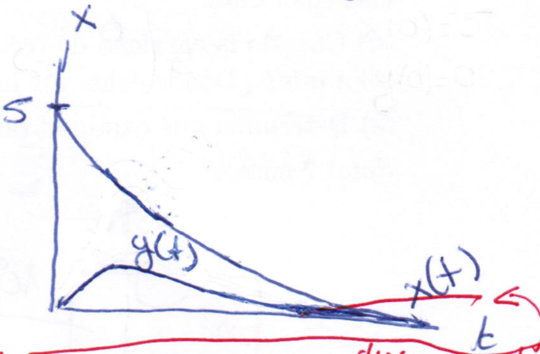
$\lambda_2 = -0'15 \qquad 0'15a + 0 = 0 \longrightarrow \vec{p}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución general $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1'5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0'3t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0'15t} \qquad \begin{matrix} x(0)=5 \\ y(0)=0 \end{matrix}$

$5 = -1'5\,c_1 \rightarrow c_1 = -\frac{10}{3}$

$0 = c_1 + c_2 \rightarrow c_2 = -c_1 = \frac{10}{3}$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 5\,e^{-0'3t} \\ y(t) = -\frac{10}{3} e^{-0'3t} + \frac{10}{3} e^{-0'15t} \end{cases}}$$



En ambos depósitos, a largo plazo se tendería a 0.

Incompleto.

$y(t) \gg x(t)$ pues $e^{-0'15t} \gg e^{-0'3t}$

d) La cantidad en el 2º depósito será máximo cuando $y'(t)=0$.

$y'(t) = e^{-0'3t} - 0'5\,e^{-0'15t} = 0 \rightarrow e^{-0'3t} = 0'5\,e^{-0'15t} \rightarrow e^{-0'15t} = 0'5$

$-0'15t = \ln 0'5 \rightarrow t = \frac{\ln 0'5}{-0'15} = 4'621\,h.$

$x(4'621) = 5 \cdot e^{-0'3 \cdot 4'621} = 1'25\,kg.$

$y(4'621) = -\frac{10}{3} e^{-0'3 \cdot 4'621} + \frac{10}{3} e^{-0'15 \cdot 4'621} = 0'83\,kg.$

$q_1 = \frac{1'25}{100} = 1'25\% \qquad q_2 = \frac{0'83}{200} = 0'415\%$

e) $\varepsilon(t)$ = cantidad de colorante en el río. $\qquad \varepsilon(0) = 0.$

$\varepsilon'(t) = 0'05\,y(t) = -\frac{1}{6} e^{-0'3t} + \frac{1}{6} e^{-0'15t}$

$\varepsilon(t) = -\frac{1}{6} \int e^{-0'3t}\,dt + \frac{1}{6} \int e^{-0'15t}\,dt = \frac{1}{6 \cdot 0'3} e^{-0'3t} - \frac{1}{6 \cdot 0'15} e^{-0'15t} + C$

$\varepsilon(t) = 0'55\,e^{-0'3t} - 1'11\,e^{-0'15t} + C \qquad 0 = -0'56 + C$
$C = 0'56.$

$\varepsilon(t) = 0'55\,e^{-0'3t} - 1'11\,e^{-0'15t} + 0'56$

Al río pasarán 0'56 kg de colorante

2.- En cierto proceso termodinámico se cumple

$$\frac{3}{2}V\,dP + \frac{5}{2}P\,dV = 0$$

(a) Probar que la forma diferencial no es exacta, y hallar un factor integrante del tipo $\mu(P)$.

(b) Resuelve la ecuación sabiendo que $P = 1$ si $V = 8$. Esboza la gráfica en el plano (P, V), y calcula V si $P = 32$.

Nota: 3 puntos

3/

a) $\frac{\partial(\frac{3}{2}V)}{\partial V} = 3/2$; $\frac{\partial(\frac{5}{2}P)}{\partial P} = 5/2$ $\rightarrow$ No exacta ✓

Busco $\mu(P)$

$(\mu(P)\cdot\frac{3}{2}V)dP + (\mu(P)\cdot\frac{5}{2}P)dV = 0$

$$\frac{\partial[\mu(P)\cdot\frac{3}{2}V]}{\partial V} = \mu(P)\cdot\frac{3}{2}V$$

$$\frac{\partial[\mu(P)\cdot\frac{5}{2}P]}{\partial P} = \mu'(P)\cdot\frac{5}{2}P + \mu(P)\cdot\frac{5}{2}$$

$$\mu(P)\cdot\frac{3}{2}V = \mu'(P)\cdot\frac{5}{2}P + \mu(P)\cdot\frac{5}{2}$$

$$\mu'(P)\cdot\frac{5}{2}\cdot P = -\mu(P)$$

$$\mu'(P) = -\frac{2}{5}\cdot\frac{\mu(P)}{P} \rightarrow \frac{d\mu}{dP} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{\mu}{P}$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{5}\int\frac{dP}{P} \rightarrow \ln|\mu| = -\frac{2}{5}\ln|P|$$

$$\boxed{\mu(P) = P^{-2/5}}$$ ✓

b)

5/5

$$h(P,V) = \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial P} = P^{-2/5}\cdot\frac{3}{2}V \rightarrow h(P,V) = \int P^{-2/5}\cdot\frac{3}{2}V\,dP = \frac{\cancel{3}}{2}V\cdot\frac{P^{3/5}}{\cancel{3}/5} + q \\ \frac{\partial h}{\partial V} = \frac{\partial[\frac{5}{2}V\cdot P^{3/5} + q(V)]}{\partial V} = \cancel{\frac{5}{2}P^{3/5}} + q'(V) = \cancel{\frac{5}{2}P^{3/5}} \quad q'(V) = 0 \end{cases}$$

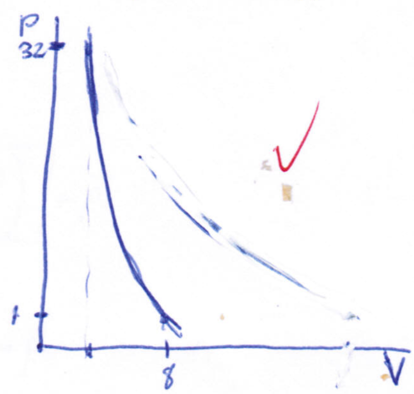
$q(V) = \text{cte} \rightarrow k$

$$h(P,V) = \frac{5}{2}V\cdot P^{3/5} + k = k'$$

$$h(P,V) = \frac{5}{2}V\cdot P^{3/5} = \tilde{k} \longrightarrow \tilde{k} = \frac{5}{2}\cdot 8\cdot 1^{3/5} = 20$$

$P = 1 \quad V = 8$

$$\boxed{h(P,V) = \frac{5}{2}V\cdot P^{3/5} = 20}$$



✓

$$P = 32 \rightarrow V = \frac{20\cdot 2}{5\cdot 32^{3/5}} = \boxed{1}$$ ✓