1/5/2013

10

1.- Un fluido con campo de velocidades $\mathbf{v} = \big(0, 1-x^2, 0\big)$, circula por un cilindro horizontal con eje $\mathbf{j}$ y base cuadrada $x \in [-1,1], z \in [0,1]$.

(a) Esbozar el cilindro, indicando los puntos donde la corriente es más rápida y más lenta.

(b) Determinar si $\mathbf{v} = \nabla h$ para algún h, en su caso hallando su valor. Encontrar un campo $\mathbf{A}$ de la forma $(0, 0, A_3(x,z))$ tal que $\mathbf{v} = \text{rot}\,\mathbf{A}$.

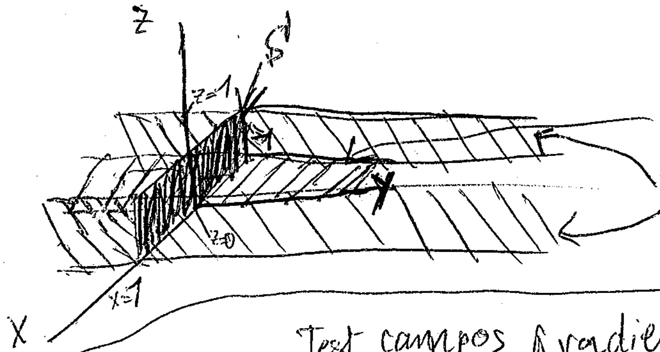
(c) Calcular el flujo neto de fluido que atraviesa una membrana rectangular S situada perpendicularmente al cilindro en el plano $y = 0$. ¿Cambiaría el flujo si la forma de la membrana fuera piramidal?

(d) Calcular el flujo neto saliente de otro campo $\mathbf{w} = (x^3, y^3, 0)$ a través de la superficie de la esfera unidad.

Nota: 7 puntos

7/

a)



$V = (0, 1-x^2, 0)$ bien

$V_{max} = V(\text{plano } yz) = 1$

$V\ min = V(\text{bordes}) = 0$ ✓

b)

Test campos gradientes en $\mathbb{R}^3$

$\vec{v} = \nabla h \Leftrightarrow \text{rot}\ \vec{v} = 0$

$$\text{rot}\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & 1-x^2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\,\partial x(1-x^2) = (2x)\vec{k}$$

✓ No es un campo gradiente

Test campos rotacionales en $\mathbb{R}^3$

$\vec{v} = \text{rot}\ \vec{A} \Longleftrightarrow \text{div}\ \vec{v} = 0$

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(1-x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$ ✓ Sí es un campo rotacional.

$(0, 0, A_3(x,z)) = A$

$$\text{rot}\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & 0 & A_3(x,z) \end{vmatrix} = \cancel{\vec{i}\,\partial y(A_3(x,z))}\ {}_0 - \vec{j}\,\partial x(A_3(x,z)) = \vec{v}$$

$0 = 0$

$$1-x^2 = -\frac{\partial(A_3(x,z))}{\partial x}$$

$0 = 0$

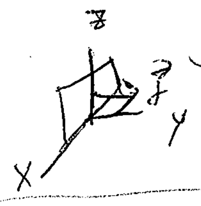
$$A_3(x,z) = \int x^2 - 1\ dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

$C = 0$

$A_3(x,z) = \frac{x^3}{3} - x$

$$A = \left(0, 0, \frac{x^3}{3} - x\right)$$ ✓

c) $\text{Flujo} = \iint_{S'} \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \int_0^1 \int_{-1}^{1} (0, 1-x^2, 0)(0,1,0)\, dx\, dz =$



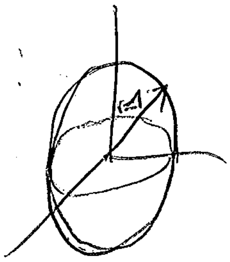
$\boxed{\vec{n} = 1\vec{j}}$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx\, dz = \left(\int_0^1 dz\right)\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx =$$

$$= 1 \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 4/3$$

No cambiaría si fuera piramidal, porque el fluido que atravesaría tanto una como otra sería el mismo, y por lo tanto, pasaría lo mismo con el flujo.

d) $W = (x^3, y^3, 0)$ $\quad B_1 = $ Esfera unidad.



$$\text{Flujo}_{\text{saliente}} = \oiint_{\partial B_1} \vec{W}\vec{n}\, dA \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_{B_1} (\operatorname{div} \vec{W})\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{B_1} (3x^2 + 3y^2)\, dx\, dy\, dz =$$

Coord. Esféricas

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & 0 \le r \le 1 \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = r \cos\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2}$$

$$= 3\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta)\, r^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr =$$

$\rightarrow$ Detrás segunda hoja.

2.- El campo de velocidades de un fluido viene dado por $\vec{v} = (1, x^2)$.

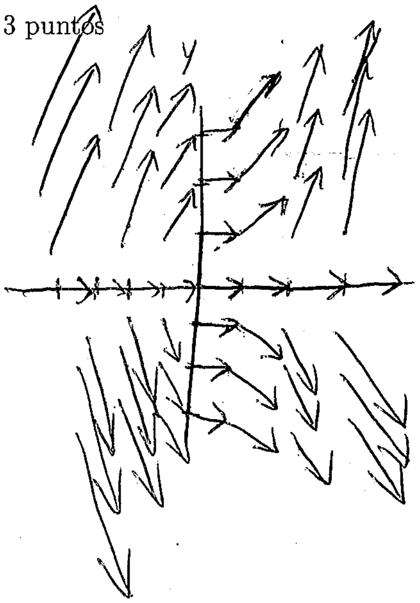
a) Esboza el campo, calcula rot $\vec{v}$ y div $\vec{v}$, y explica si el fluido rota y/o se expande.

b) Si T es el triángulo de vértices $(0,0), (2,2), (0,2)$, calcula la circulación de $\vec{v}$ a lo largo de la frontera de T, así como el flujo neto saliente a través de ∂T.

Nota: 3 puntos

3

a)

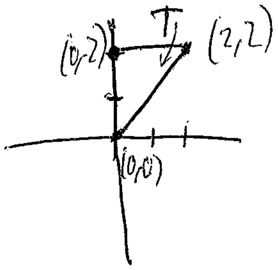


$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{-\partial(1)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2)}{\partial x} = -0 + 2x = 2x$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2)}{\partial y} = 0$$

El fluido rota dependiendo de la x.

b)



$$\text{Circulación} = \oint_{\partial T} \vec{v}\, d\vec{r} \overset{\text{Green}}{=} \iint_T \text{rot}(\vec{v})\, dx\,dy =$$

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y \end{array} \right\} \quad = \int_0^2 \int_0^y 2x \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} \right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^2 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Flujo} = \int_{\partial T} (1, x^2)(dy, -dx) \overset{\text{Green 2}}{=} \iint_T \text{div}(\vec{v})\, dx\,dy = \iint_T 0\, dx\,dy = 0$$

→ Sigue

① d) $=3\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^4 \operatorname{sen}^3\varphi \,\underbrace{\cancel{(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}}_{1}\, d\theta\, d\varphi\, dr =$

$$=3\left(\int_0^1 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 3\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^3\varphi}{3}-\cos\varphi\right]_0^{\pi}$$

$$=3\cdot\left[\frac{1}{5}-0\right]\left[2\pi-0\right]\left[-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right] = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{24\pi}{15} = \frac{8\pi}{5}$$

$$\int \operatorname{sen}^3\varphi\, d\varphi = \int \operatorname{sen}^2\varphi\, \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \int (1-\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi - \int \cos^2\varphi\, \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi =$$

$\cos\varphi = t$

$-\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = dt \rightarrow d\varphi = \frac{dt}{-\operatorname{sen}\varphi}$

$$= -\cos\varphi + \int t^2\, \cancel{\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{dt}{+\cancel{\operatorname{sen}\varphi}} = \frac{t^3}{3} - \cos\varphi = \frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi$$