Matemáticas II. 1º Ingeniería Química. 15/7/2013

Nombre y dni: ....

1.- La descomposición del peróxido de hidrógeno es una reacción del tipo $2A \to X$, es decir la velocidad de descomposición es proporcional al cuadrado de la concentración.

a) Formula una ecuación diferencial para $A(t)$, la concentración de peróxido de hidrógeno tras t segundos.

b) Resuelve la ecuación diferencial sabiendo que para rebajar la concentración del 75% al 50% se emplean 6 segundos.

Nota: 2 puntos

a) $A(t)$ = concentración de H_2O_2 tras t segundos

$$\boxed{A'(t) = -k\,A(t)^2}$$

b) Sabemos $A(0) = 0'75 \longrightarrow A(6) = 0'50$

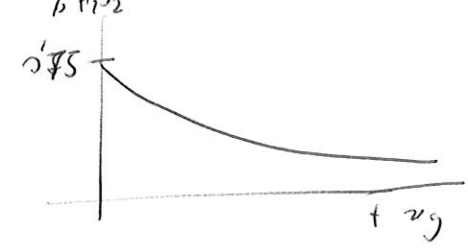
$$\frac{dA}{dt} = -kA^2 \Rightarrow \frac{dA}{A^2} = -k\,dt \Rightarrow -\int \frac{dA}{A^2} = \int k\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{A} = kt + C_1} \xrightarrow{t=0} \frac{1}{0'75} = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{4}{3}}$$

$$\xrightarrow{t=6} \frac{1}{0'5} = k\,6 + \frac{4}{3} \Rightarrow 6k = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 1/9}$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{1}{kt + C_1} = \frac{1}{\frac{t}{9} + \frac{4}{3}} = \boxed{\frac{9}{t+12}}$$



2.- En un circuito CR, la cantidad de carga $Q(t)$ almacenada en el condensador tras t segundos cumple la ecuación diferencial

$$RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V.$$

Suponer que $R = 2$, $C = 0'01$, $V = 20$ y que el condensador está inicialmente descargado.

a) Calcula la solución de equilibrio y esboza la gráfica de $Q(t)$.

b) Resuelve la ecuación diferencial, y determina cuándo se alcanza la mitad de la carga máxima del condensador.

c) Se modifica el circuito añadiendo una inductancia, de modo que la ecuación anterior queda

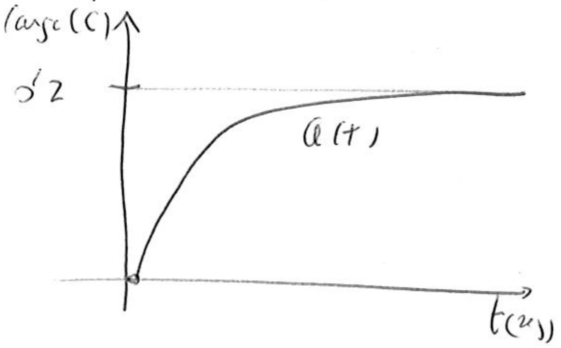
$$0'5Q''(t) + 2Q'(t) + 100Q(t) = 20.$$

Calcula $Q(t)$ y esboza aproximadamente su gráfica de $Q(t)$ cuando $Q(0) = 0'2$, $Q'(0) = 1$.

Nota: 3 puntos

a) $\begin{cases} 2Q'(t) + 100Q(t) = 20 \\ Q(0) = 0 \end{cases}$

Busco sol equilibrio $Q(t) \equiv Q_{eq} \longrightarrow 100 Q_{eq} = 20 \Rightarrow \boxed{Q_{eq} = \frac{20}{100} = 0'2}$



b) $Q(t) = C e^{-50t} + \underbrace{Q_{eq}}_{=0'2}$

$Q(0)=0 \Rightarrow C = -0'2$

$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 0'2(1 - e^{-50t})}$

mitad carga máxima

Busco t / $Q(t) = 0'1$

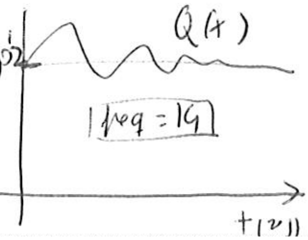
$\Rightarrow 0'2(1-e^{-50t}) = 0'1 \Rightarrow 1 - e^{-50t} = 1/2$

$\Rightarrow e^{-50t} = 1/2 \Rightarrow e^{50t} = 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 2}{50} = 0'014 \text{ seg}}$

c) $0'5\lambda^2 + 2\lambda + 100 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-200}}{1} = -2 \pm 14i$

$\Rightarrow \boxed{Q(t) = A e^{-2t}\cos(14t) + B e^{-2t}\,\mathrm{sen}(14t) + 0'2}$

Q_{eq}



$Q(0) = 0'2 = A + 0'2 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

$Q'(0) = 1 = \cancel{-2Be^{-2t}\,\mathrm{sen}(14t)} + Be^{-2t}\cos(14t)\cdot 14 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{14}}$

3.- En cierto experimento químico, las moléculas están distribuidas en una placa de Petri de centro el origen y radio 5 cm, con densidad $\rho(x,y) = x^2 + y^2$ (en moles/cm^2).

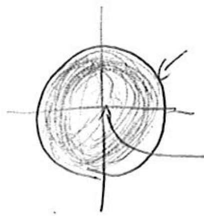
(a) Determina en qué zonas de la placa hay más y menos moléculas. Calcula la cantidad total de moléculas (en moles) en el interior de la placa.

(b) La reacción evoluciona de zonas de mayor a menor concentración de moléculas, y su velocidad viene dada por el campo de vectores $\vec{v} = -\nabla\rho$. Esboza este campo de vectores y calcula su circulación a lo largo del segmento que une el origen con el punto $(5,0)$.

(c) Calcula el flujo neto de $\vec{v}$ a través de la circunferencia de radio 2, y explica si las moléculas entran o salen de dicha circunferencia.

Nota: 3 puntos

(a)



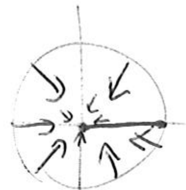
más denso en el borde $\rho = 5$

$\rho_{min} = 0$

ρ radial $= r^2$

$$Q_T = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy = \int_0^r 2\pi r \cdot r^2\, dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^5 = \frac{2\pi \cdot 5^4}{4}$$

(b)

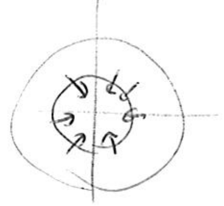


$$\nabla(x^2+y^2) = (2x, 2y) \Rightarrow \vec{v} = -\nabla\rho = (-2x, -2y)$$

$$\text{Circul} = \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = -\int_\gamma \nabla\rho \cdot d\vec{r} = -[\rho(5,0) - \rho(0,0)] = -25$$

Tma de clase

(c)



El flujo neto es claramente entrante.

$$\text{Flujo} = \oint_{C_2} \vec{v}\cdot\vec{n} \overset{\text{Green 2}}{=} \iint_{D_2} \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy$$

(circunf radio 2)   (disco radio 2)

$$\operatorname{div}(2x, 2y) = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} = 2 + 2 = 4$$

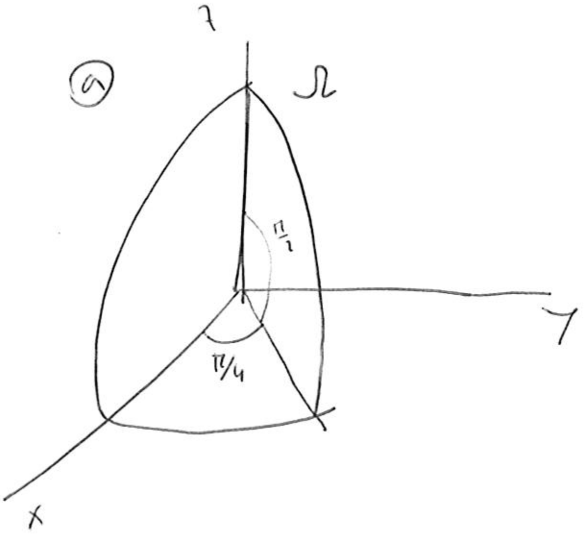
$$\Rightarrow \text{Flujo} = 4\iint_{D_2} dx\,dy = 4 \cdot \text{Área}(D_2) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$$

4.- Considera la porción de la bola unidad (maciza) dada por

$$\Omega = \{\ 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{4}\ \}.$$

(a) Esboza la región Ω, y calcula su masa total si la densidad es $\rho = r^2$.
(b) Calcula el flujo neto a través de la superficie de Ω del campo $\vec{\mathbf{v}} = (z, y, x)$, es decir $\iint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$.
Nota: 2 puntos

(a)



$$M_T = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_\Omega r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^1 r^4 dr\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{+\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$$

(b)

$$\text{Flujo} = \iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{=} \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\ dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

(pues $\partial\Omega$ es superficie cerrada, de interior Ω)

$$= Vol(\Omega)$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3}\right)/16 = \frac{\pi}{12}$$

se ve a ojo que Ω es $\frac{1}{16}$ de la bola unidad

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 1$$