Matemáticas II. 1º Ingeniería Química. 7/6/2013

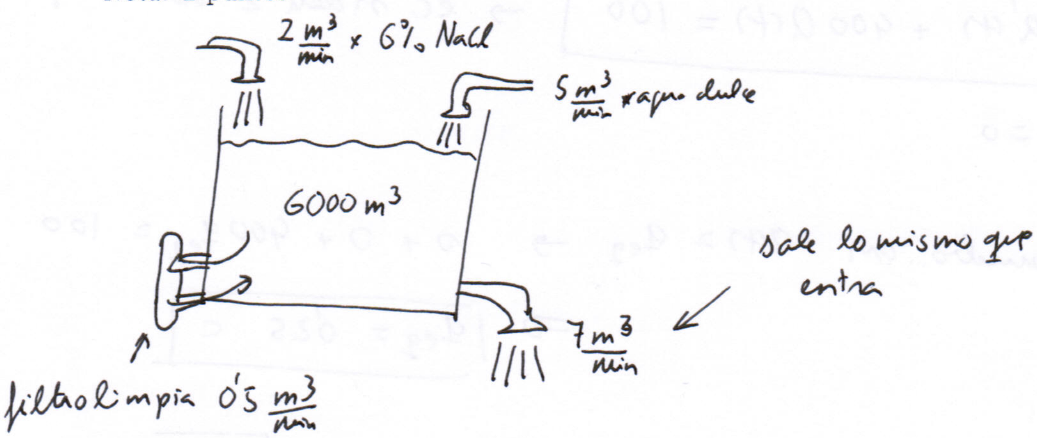
Nombre y dni: ....

1.- Una planta desalinizadora dispone de una balsa de volumen 6 Dm^3. Recibe un caudal de 2 m^3/min de agua salada al 6%, y otro caudal de agua dulce de 5 m^3/min. Dispone de un sumidero de modo que el volumen de la balsa se mantiene siempre constante. Además, dentro de la balsa se ha instalado un filtro que limpia completamente a un ritmo de $0'5$ m^3/min.

(a) Formula el problema con una ecuación diferencial, y determina la *concentración* de sal en la balsa a largo plazo.

(b) Queremos que la concentración en la balsa a largo plazo baje del $1'2\%$. ¿A qué ritmo debería limpiar el filtro? Si no podemos cambiar el filtro, ¿qué caudal de agua dulce habría que introducir?

Nota: 2 puntos



$x(t)$ = cantidad de NaCl en depósito tras t min

a) $\boxed{x'(t) = 2 \cdot \frac{6}{100} - \frac{7'5\, x(t)}{6.000}}$ $\Rightarrow$ la sol de equilibrio $x(t) \equiv x_{eq}$ es

$$x_{eq} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{7'5}{6000}} = 96$$

$$\text{concentr equil} = q_{eq} = \frac{96}{6000} = \boxed{1'6\ \%}$$

b) • k = ritmo de limpieza del filtro $\Rightarrow x_{eq} = \frac{720}{7+k}$

$$\Rightarrow q_{eq} = \frac{x_{eq}}{6000} = \frac{720}{(7+k)6000} = \frac{1'2}{100} \Rightarrow 7+k = \frac{72}{1'2 \cdot 6} = 10$$

$\Rightarrow$ necesito que el filtro limpie $\boxed{k = 3\ \frac{m^3}{min}}$

• Si no podemos cambiar el filtro, $D = \frac{m^3}{min}$ agua dulce entrante

$$\Rightarrow x_{eq} = \frac{720}{2'5 + D} = 72 \Rightarrow \boxed{D = 7'5\ \frac{m^3}{min}}$$

2.- Un circuito LRC consta de una inductancia de 0.5H, una resistencia de 20Ω, un condensador de capacidad $2'5 \cdot 10^{-3}$F, y una FEM de 100V. La carga almacenada en el condensador $Q(t)$ cumple la ED

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V.$$

(i) Resuelve la ED con los datos anteriores, si inicialmente $Q(0) = Q'(0) = 0$.

(ii) Determina la carga de equilibrio, la frecuencia de oscilación, y pinta la gráfica de $Q(t)$.

(iii) ¿Cuál es el pico de carga máxima y cuándo se alcanza?

(iv) ¿Quién debería ser R para que $Q(t)$ oscile a la mitad de frecuencia?

Nota: 4 puntos

(i) $\boxed{\frac{1}{2}Q''(t) + 20Q'(t) + 400Q(t) = 100}$ → ec. orden 2 no homogenea.

$Q(0) = Q'(0) = 0$

Sol particular: pruebo con $Q(t) = q_{eq}$ → $0 + 0 + 400 q_{eq} = 100$

$\Rightarrow \boxed{q_{eq} = 0'25 \text{ C}}$

Sol gral homogenea:

- Autovalores: $\frac{\lambda^2}{2} + 20\lambda + 400 = 0 \Rightarrow \lambda = -20 \pm \sqrt{400-800}$
$= -20 \pm i\,20$

$\boxed{\text{frecuencia oscilación} = 20 \text{ Hz}}$

SOL GRAL

$$Q(t) = A e^{-20t}\cos(20t) + B e^{-20t}\,\text{sen}(20t) + 0'25$$

$Q(0) = 0 = A + 0'25 \Rightarrow \boxed{A = -0'25}$

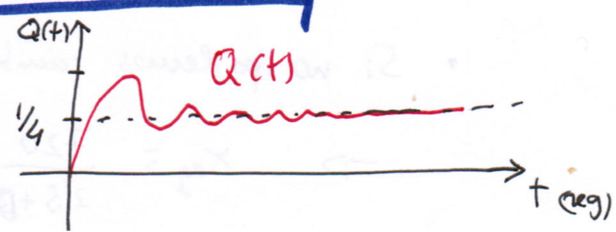
$$Q'(t) = A(-20)e^{-20t}\cos(20t) + Ae^{-20t}(-\text{sen}(20t))\cdot 20 + B(-20)e^{-20t}\,\text{sen}(20t) + Be^{-20t}\cos(20t)\cdot 20$$

$\Rightarrow Q'(0) = 0 = -20A + 20B \Rightarrow \boxed{B = A = -0'25}$

$$\Rightarrow Q(t) = -0'25\, e^{-20t}\left(\cos(20t) + \text{sen}(20t)\right) + 0'25$$

$$\boxed{Q(t) = -0'25\sqrt{2}\, e^{-20t}\cos\left(20t - \frac{\pi}{4}\right) + 0'25}$$

gráfica →



(iii) <u>Carga máxima</u>: Busco $Q'(t)=0$

$$Q'(t) = +20\cdot 0'25\, e^{-20t}\left(2\,\text{sen}(20t)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(20t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{20}$$

$\Rightarrow$ el primer máximo es en $\boxed{\frac{\pi}{20}\text{ seg}} \boxed{= 0'157\text{ seg}}$

y vale $\boxed{Q_{max}} = Q\left(\frac{\pi}{20}\right) = -0'25\, e^{-\pi}(\cos\pi + \text{sen}\,\pi) + 0'25$

$$\boxed{= 0'25\cdot e^{-\pi} + 0'25 = 0'26\,C}$$

(iv) Busco R / oscilación $= 10$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Q''(t) + R\,Q'(t) + 400\,Q(t) = 100$$

$\rightarrow$ autovalores $\frac{1}{2}\lambda^2 + R\lambda + 400 = 0 \Rightarrow \lambda = -R \pm \underbrace{\sqrt{R^2-800}}_{\pm 10i}$

$\rightarrow$ necesito $R^2 - 800 = -100 \Rightarrow R^2 = 700$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{700} = 26'4\ \Omega}$$

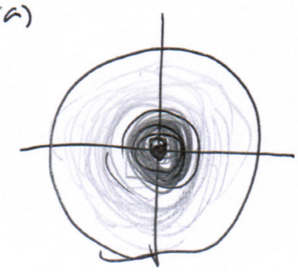
3.- (a) Hallar la masa de una placa circular de centro el origen y radio 4 cuya densidad viene dada por $\rho(x,y) = 1/(4+x^2+y^2)$. ¿Cuáles son los puntos de la placa con menor densidad?

(b) ~~Esboza el campo de vectores $\vec{v} = (2y, -x)$, y~~ Calcula la circulación $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ en los siguientes casos

- γ es el borde del rectángulo $[-1,1] \times [-2,2]$ (sentido antihorario)
- γ es la diagonal del rectángulo que une $(-1,-2)$ con $(1,2)$.

Nota: 2 puntos

(a)



$$\rho(x,y) = \frac{1}{4+r^2} \longrightarrow \begin{array}{l} \rho_{max} = \rho(0) = 1 \\ \rho_{min} = \rho(4) = \frac{1}{20} \end{array}$$

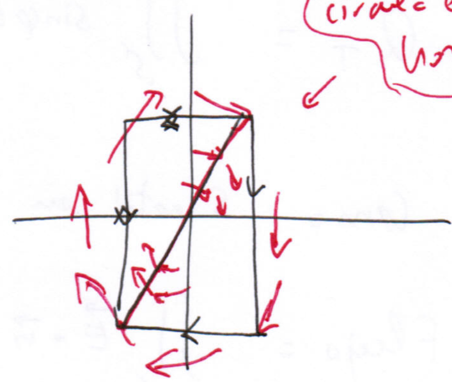
$$M = \int_0^4 \frac{2\pi r}{4+r^2}\, dr = \pi \Big[\ln[4+r^2] \Big]_0^4 = \pi \ln \frac{20}{4} = \pi \ln 5.$$

(b)

① $$\int_\gamma 2y\,dx - x\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_{[-1,1]\times[-2,2]} \left(-\frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(-x)}{\partial x} \right) dx\,dy$$

$$= -3 \text{ Área } ([-1,1]\times[-2,2]) = -3 \cdot 2 \cdot 4 = -24$$

circula en sentido horario



② Parametrizo:

$\vec{\gamma}$ está sobre la recta $y = 2x$

$$\begin{cases} x = t \to dx = dt \\ y = 2t \to dy = 2dt \end{cases}$$

$-1 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \int_{\vec{\gamma}} 2y\,dx - x\,dy = \int_{-1}^{1} (4t - 2t)\, dt = \int_{-1}^{1} 2t\, dt = 0$$

impar

se observa en el dibujo que por simetría, las circulaciones

4.- Considera la *superficie* de la esfera unidad dada por

$$S = \left\{ \tfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \right\},$$

y cuya densidad de carga viene dada por $\rho = \sin\varphi\cos\theta$.

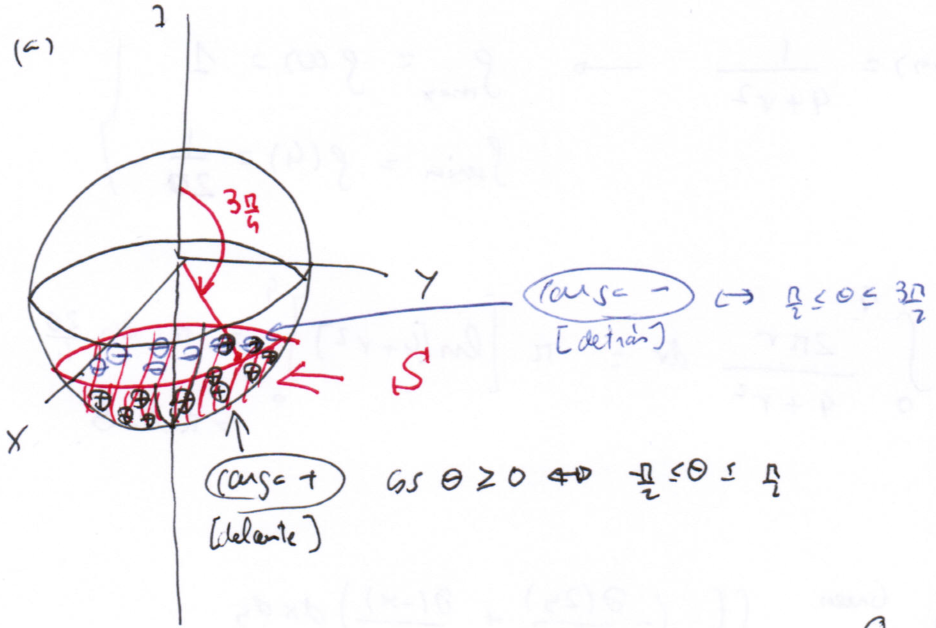
(a) Esboza la superficie S, indicando las zonas con carga positiva y negativa. ~~¿En qué puntos es la carga máxima~~?

(b) Calcula la carga total de S

(c) Calcula el flujo a través de S del campo $\vec{\mathrm{E}} = (0,0,-1)$, es decir $\iint_S \vec{\mathrm{E}}\cdot\vec{\mathrm{n}}$.

Nota: 2 puntos

(a)



(b) Por simetría se observa que $Q_T = 0$.

También se puede calcular

$$Q_T = \iint_S \sin\varphi\cos\theta \,\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right)}_{=\,0}$$

(c) Como S está en la esfera $\Rightarrow \vec{n} = (x,y,z)$

$$\text{Flujo} = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dA = \iint_S (0,0,-1)\cdot(x,y,z)\, dA = \iint_S -z\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} -\cos\varphi\,\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\left[\frac{\cos^2\varphi}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$