

Nombre:

En una reacción química, el número de moles $x(t)$ de reactivo tras t segundos evoluciona según la ED

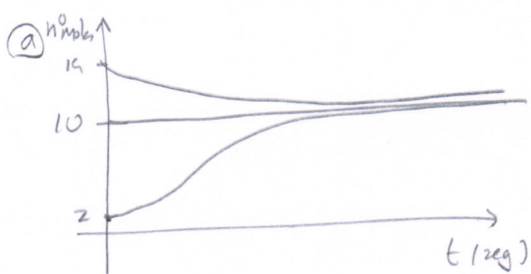
$$x'(t) = \alpha x(t) (10 - x(t))$$

donde $\alpha > 0$ es una constante.

(a) Determina la cantidad de reactivo a largo plazo, y esboza la gráfica de $x(t)$ para los datos iniciales $x(0) = 2$ y $x(0) = 14$ (no es necesario resolver la ED).

(b) ¿Cuál será el valor de α si observamos que al empezar con 2 moles de reactivo, al cabo de 2 segundos se tienen 5 moles de reactivo?

(c) En las condiciones de (b), ¿cuántos moles de reactivo habrá tras 4 segundos de reacción?



Datos

$$(b) \begin{cases} x(0) = 2 \\ x(2) = 5 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x (10 - x) \rightarrow \int \frac{dx}{x(10-x)} = \int \alpha dt$$

$$\int \frac{dx}{x(10-x)} = \frac{1}{10} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{10-x} \right) dx = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x}{10-x} \right| = \alpha t + C$$

$$t=0 \left. \begin{matrix} x=2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{1}{10} \ln \left(\frac{2}{8} \right) = C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{10} \ln 4}$$

$$t=2 \left. \begin{matrix} x=5 \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{1}{10} \ln \left(\frac{5}{5} \right) = \alpha \cdot 2 + \frac{1}{10} \ln 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{20} \ln 4 = 0.069}$$

$$(c) \ln \frac{x}{10-x} = 10\alpha t + 10C = \frac{1}{2} \ln 4 \cdot t - \ln 4 \stackrel{t=4}{=} \ln 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10-x} = 4 \Rightarrow x = 40 - 4x \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8 \text{ moles}$$