MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química **Test 4, 25/2/2013**

[redacted] 10

Tenemos un tanque con 300 litros de una disolución al 5 % de ácido sulfúrico y agua, cuya concentración deseamos rebajar de forma progresiva. Para ello, sacamos del tanque 2 litros de disolución por minuto, e introducimos desde un grifo externo 4 litros/min de disolución con una concentración menor al q_0 %.
Si sabemos que la **cantidad** $x(t)$ de H_2SO_4 presente en el tanque tras t minutos cumple la ED

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{150+t} + 0'1,$$

a) Determina el valor de q_0, y el volumen de la disolución en el tanque tras t minutos.
b) Resuelve la ecuación diferencial.
c) ¿Cuál será la *concentración* en el tanque cuándo éste llegue a los 500 litros?

a) $V(t) = 300 + 2t$ ✓

$x'(t) = -\dfrac{x(t)}{150+t} \underbrace{+0.1}$

Entran 0.1 en 1 minuto
entran 4 litros/minuto

$\left\{ q_0 = \dfrac{0.1}{4} \cdot 100 = 2.5\,\% \right.$ ✓

b) ① $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{150+t} \to \displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{150+t} \to \ln|x| = -\ln|150+t| + C \to$

$x = (150+t)^{-1} \cdot e^C \to x(t) = (150+t)^{-1} \cdot K$ ✓

② $x^*(t) = (150+t)^{-1} \cdot K(t) \to x'(t) = -\dfrac{1}{(150+t)^2} \cdot K(t) + \dfrac{K'(t)}{150+t}$

Igualo $\to -\dfrac{K(t)}{(150+t)^2} + \dfrac{K'(t)}{150+t} = -\dfrac{K(t)}{(150+t)^2} + 0.1 \to K'(t) = 15 + 0{,}1t$

$K(t) = \displaystyle\int 15\,dt + \int 0{,}1t\,dt = 15t + 0{,}1\frac{t^2}{2} + C$ ✓

③ Sustituyo $\to x(t) = \dfrac{15t + \frac{t^2}{20} + C}{150+t} \to$ Si $x(0) = 15 \Rightarrow C = 2250$

$x(t) = \dfrac{15t + \frac{t^2}{20} + 2250}{150+t}$ ✓

c) Calculo t / $V(t) = 500 \to 300 + 2t = 500 \to t = 100$

Calculo $x(t)$ para $t = 100 \Rightarrow x(100) = \dfrac{1500 + \frac{10000}{20} + 2250}{150 + 100} = 17$

Concentración cuando hay 500 litros en el tanque es $\dfrac{17}{500} = 0{,}034 \Rightarrow 3{,}4\,\%$

MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química Test 4, 25/2/2013

10

[redacted]

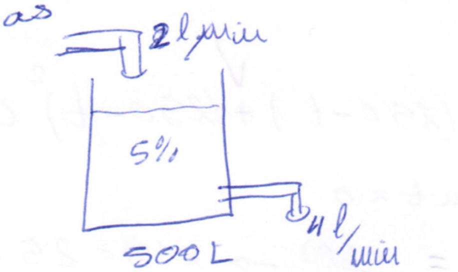
1.- Tenemos un tanque con 500 litros de una disolución al 5 % de ácido sulfúrico y agua, cuya concentración deseamos aumentar de forma progresiva. Para ello, sacamos del tanque 4 litros de disolución por minuto, e introducimos desde un grifo externo 2 litros/min de disolución con una concentración mayor al q_0 %.
Si sabemos que la **cantidad** $x(t)$ de H_2SO_4 presente en el tanque tras t minutos cumple la ED

$$x'(t) = -\overbrace{\frac{2x(t)}{250-t}}^{\text{sale}} + \overbrace{0'4}^{\text{entra}},$$

a) Determina el valor de q_0, y el volumen de la disolución en el tanque tras t minutos.

b) Resuelve la ecuación diferencial.

c) ¿Cuál será la *concentración* en el tanque cuándo éste llegue a los 300 litros?



$x(t)$ = cant. H_2SO_4 ~~tras~~ t minutos

$q(t)$ = conc. H_2SO_4 tras t min.

$V(t)$ = vol. disolución tras t min.

$$V'(t) = \overbrace{2}^{\text{entra}} - \overbrace{4}^{\text{sale}} = -2, \quad \frac{dV}{dt} = -2, \quad \int dV = -2\int dt$$

$$V = -2t \to \boxed{V(t) = -2t + 500}$$ vol. inicial ✓

En la ED se ve que entran 0,4 g por minuto, por lo que si entran 2 l/min:

$$q_0 = \frac{0,4\,g}{2\,l} = \boxed{0,2\,g/l} = \underline{20\,\%}$$ ✓

$$\to x'(t) = -\frac{2x(t)}{250-t} + 0,4$$

• 1º Paso: $x'(t) = -\frac{2x(t)}{250-t}; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{250-t},$

$$\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{250-t}, \quad \underline{\ln x = 2\ln|250-t| + C_1}$$

$$e^{\ln x} = e^{\ln|250-t|^2} \cdot e^{C_1}, \quad x = |250-t|^2 \cdot e^{C_1} K$$

$$x(t) = K(250-t)^2,$$ ✓

• 2º paso: Hacemos variar la constante K.

$$\left[K(t)(250-t)^2\right]' = \frac{-2x(t)}{250-t} + 0,4$$

$$K'(t)(250-t)^2 \cancel{- 2(250-t)\underbrace{K(t)}_{=\frac{x(t)}{(250-t)^2}}} = \cancel{\frac{-2x(t)}{250-t}} + 0,4$$

$$K'(t) = \frac{0,4}{(250-t)^2} \to K(t) = \int \frac{0,4}{(250-t)^2} = 0,4\int (250-t)^{-2}$$

$$= (-)0,4(250-t)^{-1}(-1) + C_1 = \underline{0,4(250-t)^{-1} + C_1}$$

• 3º paso: Sustituir K en la ED.

$$x(t) = \left[\frac{0,4}{250-t} + C_1\right]\cdot(250-t)^2 = 0,4(250-t) + (250-t)^2 C_1$$

$$= 100 - 0,4t + (250-t)^2 C_1 \longrightarrow$$

5% en $t=0$

$$0,05 = \frac{x(0)}{v(0)=500} \to x(0) = 25\ g$$

$$\xrightarrow[x=25]{t=0} 25 = 100 + 250^2 C_1 \to \underline{C_1 = -1,2\cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{x(t) = 100 - 0,4t - (250-t)^2\, 1,2\cdot 10^{-3}}$$

c) $300 = V(t) = -2t + 500 \to \underline{t = 100\ \text{min}}$

$$x(100) = 100 - 40 - 150^2 \cdot 1,2\cdot 10^{-3} = 33\ g$$

$$q(100) = \frac{x(100)}{V(100)} = \frac{33}{300} = \boxed{0,11\ g/l} = \underline{11\ \%}$$