

Nombre:

Tenemos un circuito LCR con  $L = 1$ ,  $R = 2$ ,  $C = 0.25$ . La carga  $Q(t)$  almacenada en el condensador cumple la ED

$$Q''(t) + 2Q'(t) + 4Q(t) = 0.$$

Si al conectar el circuito se tiene  $Q(0) = 1$  y  $Q'(0) = 0$ ,

- Resuelve la ecuación diferencial, y esboza la gráfica de  $Q(t)$ .
- ¿A partir de qué momento será  $|Q(t)| < 0.01$ ?
- Si conectamos una pila externa con voltaje constante  $V = 36$ , ¿cuál será la carga del condensador a largo plazo? ¿Qué aspecto tendría la gráfica?
- ¿Hasta qué valor tendríamos que aumentar  $R$  para que no haya oscilación?

a)  $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

$x(0) = 1 \rightarrow \boxed{1 = c_1}$

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + c_1 e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + c_2 e^{-t} \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t)$$

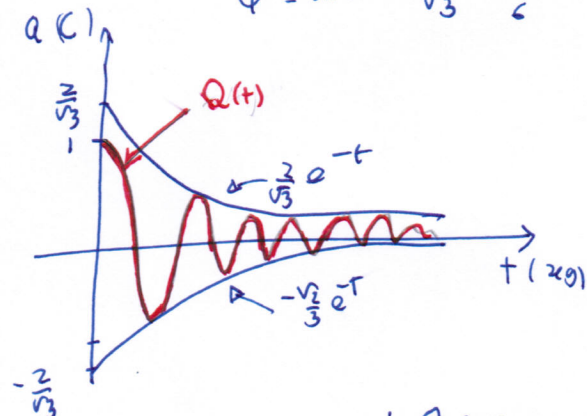
$x'(0) = 0$

$$0 = -c_1 + \sqrt{3}c_2 \Rightarrow c_2 = 1/\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t} \left( \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right) = e^{-t} \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \cos(\sqrt{3}t - \varphi)$$

$$= e^{-t} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6})$$

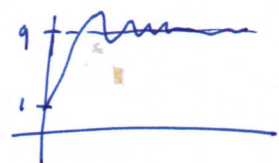
$\varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$



b) Busco  $t / |x(t)| < 0.01$

$\Rightarrow$  basta que  $e^{-t} \frac{2}{\sqrt{3}} < 0.01$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot 100}{\sqrt{3}} < e^t \Rightarrow t > \ln\left(\frac{\sqrt{3} \cdot 100}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{4.75 \text{ seg}}$



c) Busco  $Q_{eq}$  para  $Q''(t) + 2Q'(t) + 4Q(t) = 36 \Rightarrow Q_{eq} = \frac{36}{4} = 9$